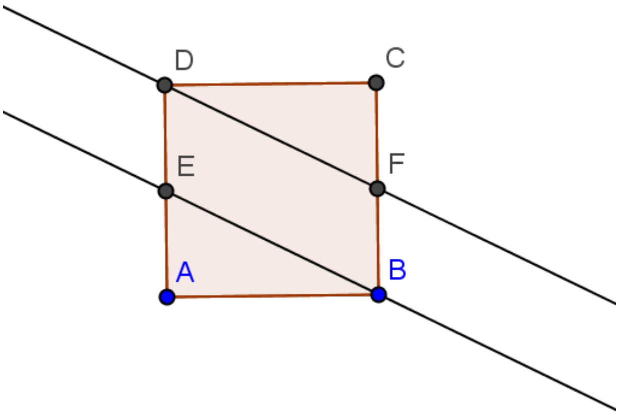
**Correction des exercices de révision sur la géométrie vectorielle**

Dans toute la correction, le plan étant munis d'un repère

- pour tout point M du plan, $x_M$ sera l'abscisse du point M et $y_M$ sera l'ordonnée du point M
- pour tout vecteur $\vec{v}$ du plan, $x_{\vec{v}}$ sera l'abscisse du vecteur $\vec{v}$ et $y_{\vec{v}}$ sera l'ordonnée du vecteur $\vec{v}$.
- L'abréviation (officielle) « i.e. » signifie c'est-à-dire

**Exercice 1 :** Soit ABCD un carré non aplati dont la longueur des côtés vaut 1 u.l. (ie unité de longueur)
Soit E le milieu de [AD] et F celui de [BC]

1. FIGURE :




2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les droites (EB) et (DF) ?
*Les droites (EB)et (DF) SEMBLENT être parallèles.*
3. Cette question vise à prouver la conjecture à l'aide de 4 méthodes différentes (les questions a., b., c. et d. sont par conséquent indépendantes)
   a. Méthode 1 : i. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
   *Si ces deux vecteurs étaient colinéaires alors les points A, B, D seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.*

   ii. Décomposer alors les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

*Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ n'étant pas colinéaires, il est alors possible de décomposer tous les autres vecteurs en fonction d'eux. En particulier,*

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \quad (\text{relation de Chasles})$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \quad (\text{car } E \text{ est le milieu de } [AD])$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \quad (\text{relation de Chasles})$$
$$= \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (\text{car } F \text{ est le milieu de } [CB])$$
$$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \begin{pmatrix} \text{car } ABCD \text{ est un cube} \\ \text{donc } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{pmatrix}$$

   iii. Conclure.

*Comme* $\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ *alors* $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$ *donc les droites (DF) et (EB)sont parallèles*

   b. Méthode 2 : i. Justifier que (D,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DA}$) est un repère du plan

*Si les deux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$ étaient colinéaires alors les points D, C, A seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est un repère du plan.*

   ii. Déterminer les coordonnées des points D, C, B,A, E et F dans ce repère

*D est l'origine du repère donc D a pour coordonnées*$(0,0)$ $[\text{en effet}, \overrightarrow{DD} = \vec{0} = 0\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}]$

*C a pour coordonnées* $(1,0)$ $[\text{car } \overrightarrow{DC} = 1\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}]$

*B a pour coordonnées* $(1,1)$ $[\text{car } ABCD \text{ est un carré donc } \overrightarrow{DB} = 1\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA} \text{ d'après la règle du parallélogramme}]$

*A a pour coordonnées* $(0,1)$ $[\text{car } \overrightarrow{DA} = 0\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}]$

*E est le milieu du segment [AD] donc E* $\left(\frac{x_A + x_D}{2} ; \frac{y_A + y_D}{2}\right)$ *ie E* $\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$ *ie E a pour coordonnées* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

*F est le milieu du segment [CB] donc F* $\left(\frac{x_C + x_B}{2} ; \frac{y_C + y_B}{2}\right)$ *ie F* $\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$ *ie F a pour coordonnées* $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

iii. Conclure

*Alors le vecteur* $\overrightarrow{EB}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_B - x_E \\ y_B - y_E \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{EB}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

*De même le vecteur* $\overrightarrow{DF}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ *(car D est l'origine du repère) ie* $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

*donc* $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$ *donc les droites (EB) et (DF) sont parallèles.*

c. Méthode 3 : i. Justifier que $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est un repère du plan

*Si les deux vecteurs* $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *étaient colinéaires alors les points B, C, A seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc* $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ *est un repère du plan.*

ii. Déterminer une équation cartésienne des droites (EB) et (DF) dans ce repère

*Dans ce nouveau repère, on montrerait comme au b.ii. que le point D a pour coordonnées* $(1,1)$, $C(1,0)$, $A(0,1)$, $B(0,0)$, $E\left(\frac{1}{2},1\right)$, $F(\frac{1}{2};0)$

*Or la droite (EB) est la droite passant par E, de vecteur directeur* $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} x_B - x_E \\ y_B - y_E \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

*Donc il existe un réel c tel que* $(EB): -x + \frac{1}{2}y + c = 0$

*Mais B appartient à la droite (EB) donc ses coordonnées vérifient toutes les équations de la droite (EB)*

*En particulier,* $-x_B + \frac{1}{2}y_B + c = 0$ *donc* $c = x_B - \frac{1}{2}y_B = 0 - 0 = 0$

*Donc UNE équation cartésienne de la droite (EB) est* $-x + \frac{1}{2}y = 0$

*De même la droite (DF) est la droite passant par D, de vecteur directeur* $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$

*ie* $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ *Donc il existe un réel c' tel que* $(DF): -x + \frac{1}{2}y + c' = 0$

*Mais D appartient à la droite (DF) donc ses coordonnées vérifient toutes les équations de la droite (DF)*

*En particulier,* $-x_D + \frac{1}{2}y_D + c' = 0$ *donc* $c' = x_D - \frac{1}{2}y_D = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

*Donc UNE équation cartésienne de la droite (DF) est* $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

iii. Conclure.

Si ces deux droites n'étaient pas parallèles alors elles seraient sécantes (car on raisonne avec des droites du plan qui ne peuvent par conséquent qu'être sécantes ou parallèles) et les coordonnées de leur point d'intersection vérifieraient le système suivant

$\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ ie $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc on aurait $0 = -\frac{1}{2}$ ce qui est absurde

donc ces deux droites sont parallèles.

<u>**Autre idée :**</u> $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$ donc (DF)//(EB)

d. Méthode 4 : i. montrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme.

or E est le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et F est le milieu de [BC] donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FB}$

comme ABCD est un carré donc un parallélogramme alors $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FB}$

d'où DEBF est un parallélogramme

ii. conclure.

DEBF est un parallélogramme donc les droites (BE) et (DF) sont parallèles

<u>**Exercice 2 :**</u> Soit ABC un triangle non aplati. Soit D le point du plan défini par $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

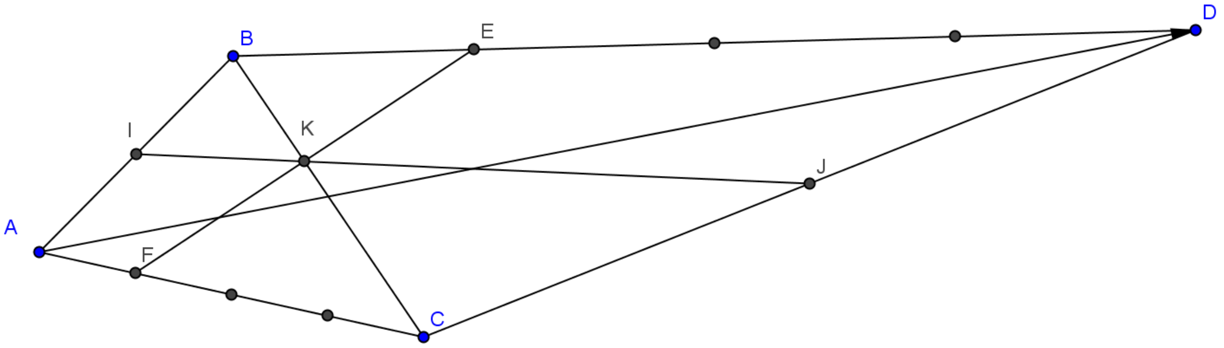
Soit I le milieu du segment [AB], J celui de [CD].

Soit E le point du plan tel que $3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ *et* F celui défini par $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. Soit K le milieu du segment [EF] .

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les points I, K et J ?

- $3\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ $donc$ $4\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ (relation de Chasles) donc E s'obtient grâce à la relation $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{FA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ $donc$ $3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ donc $4\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (relation de Chasles)

  donc pour construire F, on utilise la relation $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$




On peut donc conjecturer que les points I, K et J sont alignés.

2. Preuve de cette conjecture à l'aide de trois méthodes différentes :

   a. Méthode 1 : i. Justifier que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère.

Le triangle ABC n'est pas aplati donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $et$ $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère.

ii. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ $et$ $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $et$ $\overrightarrow{AC}$:

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $et$ $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc tous les vecteurs sont décomposables à l'aide de ces deux vecteurs.

$*$ $D'une\ part, on\ a\ alors$ $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF})$ $(car\ K\ est\ le\ milieu\ de\ [EF])$ $donc$ $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF})$

$or\ I\ est\ le\ milieu\ de\ [AB]\ donc$ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $donc$ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC})$ (cf le 1.)

$donc$ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

donc $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{BA}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

• D'autre part, on a de même $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC})$ (car J est le milieu de [CD])

donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})$ $(relation\ de\ Chasles)$ $donc$ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})$

Or $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$ $vaut$ $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ $(d'après\ ce\ qui\ précède)$ D'où $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

iii. Conclure

$On\ a\ alors\ \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{8}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{IK}$

$donc\ les\ vecteurs$ $\overrightarrow{IK}$ $et$ $\overrightarrow{IJ}$ $sont\ colinéaires\ donc\ les\ points\ I, J, K\ sont\ alignés.$

   b. Méthode 2 : i. Justifier que $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ est un repère.

Le triangle ABC n'est pas aplati donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ $et$ $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ est un repère.

ii. Déterminer les coordonnées des points I, K, J dans ce repère

$Dans\ ce\ repère, B\ a\ pour\ coordonnées\ (0{,}0)\ (car\ c'est\ l'origine\ du\ repère),$ $A\ a\ pour\ coordonnées\ (1{,}0)$ $(car\ \overrightarrow{BA}=1\overrightarrow{BA}+0\overrightarrow{BC})$ $et\ C\ a\ pour\ coordonnées\ (0{,}1)$ $(car\ \overrightarrow{BC}=1\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BA})$

$De\ plus,$ $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$ $donc$ $\begin{cases}x_D-x_A=2(x_C-x_A+x_B-x_A)\\ y_D-y_A=2(y_C-y_A+y_B-y_A)\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}x_D=2x_C-3x_A+2x_B\\ y_D=2y_C-3y_A+2y_B\end{cases}$

$donc$ $\begin{cases}x_D=0-3+0\\ y_D=2-0+0\end{cases}$ donc D a pour coordonnées (-3 ;2)

Or I est le milieu du segment [AB] donc $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $ie$ $I\left(\frac{1}{2};0\right)$

$et$ $J\ est\ le\ milieu\ de\ [CD]$ $donc$ $J\left(\dfrac{x_C+x_D}{2},\dfrac{y_C+y_D}{2}\right)$ $ie$ $J\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

De plus, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ $donc$ $\begin{cases}x_E-x_B=\frac{1}{4}(x_D-x_B)\\ y_E-y_B=\frac{1}{4}(y_D-y_B)\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}x_E-0=\frac{1}{4}(-3-0)\\ y_E-0=\frac{1}{4}(2-0)\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}x_E=-\frac{3}{4}\\ y_E=\frac{1}{2}\end{cases}$ $donc$ $E(-\frac{3}{4};\frac{1}{2})$

De plus, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ donc $\begin{cases} x_F - x_A = \frac{1}{4}(x_C - x_A) \\ y_F - y_A = \frac{1}{4}(y_C - y_A)\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_F - 1 = \frac{1}{4}(0-1) \\ y_F - 0 = \frac{1}{4}(1-0)\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_F = \frac{3}{4} \\ y_F = \frac{1}{4}\end{cases}$ donc $F(-\frac{3}{4};\frac{1}{4})$

Or K est le milieu du segment [EF] donc $K\left(\frac{x_E+x_F}{2}, \frac{y_E+y_F}{2}\right)$ ie $K\left(0;\frac{3}{8}\right)$

iii. Conclure

*Dans ce repère,* $\overrightarrow{IK}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_K - x_I \\ y_K - y_I\end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}\end{pmatrix}$.

*De même* $\overrightarrow{IJ}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I\end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times 4 \\ \frac{3}{8}\times 4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}=4\overrightarrow{IK}$

*donc les vecteurs* $\overrightarrow{IK}$ *et* $\overrightarrow{IJ}$ *sont colinéaires donc les points* $I, J, K$ *sont alignés.*

c. Méthode 3 : Reprendre les coordonnées des points I, K et J dans le repère $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ trouvées au b.

i. Trouver une équation cartésienne de la droite (IK).

$(IK)$ *est la droite passant par le point I de coordonnées* $\left(\frac{1}{2};0\right)$, *de vecteur directeur* $\overrightarrow{IK}$ *de coordonnées* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}\end{pmatrix}$

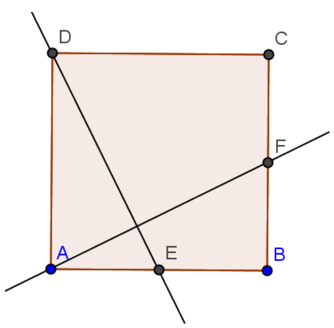
Donc il existe un réel c tel que la droite (IK) est pour équation cartésienne $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}y+c=0$ avec $c=-\frac{3}{8}x_I-\frac{1}{2}y_I=-\frac{3}{16}$

Donc (IK) : $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{16}=0$ donc $6x+8y-3=0$ est une autre équation cartésienne de la droite (IK)

ii. Le point J appartient-il à cette droite ?

*Comme* $6x_J+8y_J-3=-9+12-3=0$ *alors les coordonnées du point J vérifient une équation cartésienne de la droite (IK)* donc J appartient à la droite (IK) donc les points I, J, K sont alignés.

**<u>Exercice 3</u> :** ABCD est un carré non aplati, E et F sont les milieux des segments [AB] et [BC].




1) 1ère méthode : i. Montrer que $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})$=0.

$\mathcal{P}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AE}$ (par bilinéarité du produit scalaire)

*Or E est le milieu de [AB] donc* $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

*et F celui de [BC] donc* $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. *De plus* $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$

$\mathcal{P}=\overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right).(-\overrightarrow{AD})+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right).\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)$

$=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

Mais ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, *d'une part,* $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, d'autre part, sont orthogonaux

donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=BC^2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=0$

*donc* $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}BC^2=0$

ii) Que peut-on en déduire sur les droites (DE) et (AF) ?

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})$=0 ie $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}=0$ *(relation de Chasles)*

*donc les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.*

2) 2nde méthode : i. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère

ABCD est un carré non aplati donc les points A, B et D ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *ne sont pas colinéaires* Donc $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère.

ii. Utiliser judicieusement ce repère pour retrouver le résultat établi au 1ii).

- **<u>Déterminer les coordonnées des points A, F, E et D dans ce repère.</u>**

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$, *A a pour cordonnées (0,0) car A est l'origine du repère,*

$B(1{,}0)$ *car* $\overrightarrow{AB}$ est le premier vecteur du repère. De même $D(0{,}1)$ *car* $\overrightarrow{AD}$ est le second vecteur du repère,
Comme ABCD est un carré alors ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *donc* $C(1{,}1)$
*Or E est le milieu du segment* $[AB]$ *donc* $E\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ *ie* $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
*De même F est le milieu de* $[BC]$ *donc* $F\left(\frac{x_C+x_B}{2}; \frac{y_C+y_B}{2}\right)$ Donc $F(1;\frac{1}{2})$

- **Conclusion :** *Dans ce repère,* $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *De même* $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Or le repère est orthonormé *(car ABCD est un carré)* donc $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = x_{\overrightarrow{AF}} \times x_{\overrightarrow{DE}} + y_{\overrightarrow{AF}} \times y_{\overrightarrow{DE}} = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$
*donc* les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{DE}$ *sont orthogonaux* donc les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

**Exercice 4 :** Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans lequel les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées ( 0;3) ; (1 ;3) et (-5 ;1). Soit H le point de coordonnées (-5 ;18)

1. a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

L'orthocentre d'un triangle est le point de concours de hauteurs d'un triangle non aplati, il suffit de montrer que le triangle est non aplati puis que le point H appartient à deux des trois hauteurs de ce triangle.
* Or les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (car $x_{\overrightarrow{BC}}y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{BC}}x_{\overrightarrow{AC}} = (-6) \times (-2) - (-2) \times (-5) = 12 - 10 = 2 \neq 0$)
donc les points A, B, C ne sont pas alignés donc ABC n'est pas aplati.

- De plus, *dans le repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *orthonormé,* $\overrightarrow{AH}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$

*et* $\overrightarrow{BC}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{AH}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AH}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = -5 \times (-6) + 15 \times (-2) = 30 - 30 = 0$
donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A
De même $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{BH}} \times x_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{BH}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = -6 \times (-5) + 15 \times (-2) = 30 - 30 = 0$
donc les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc la droite (BH) est la hauteur du triangle ABC issue de B
**Conclusion :** H appartient à deux des trois hauteurs du triangle ABC non aplati
donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

b. Déterminer une équation de la hauteur $h_A$ issue du sommet A du triangle ABC.

H est l'orthocentre de ce triangle donc *la hauteur* $h_A$ *issue de A est la droite (AH) ie la droite passant par A, de vecteur directeur* $\overrightarrow{AH}$ *ayant pour coordonnées* $\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ donc il existe un réel k tel que $(\mathrm{AH}): 15\mathrm{x} + 5\mathrm{y} + \mathrm{k} = 0$
où $\mathrm{k} = -15\mathrm{x}_A - 5\mathrm{y}_A$ *donc* $k = -15$ *Donc* $(\mathrm{AH}): 15\mathrm{x} + 5\mathrm{y} - 15 = 0$
donc une équation de la droite (AH) est $3\mathrm{x} + \mathrm{y} - 3 = 0$

2.

- **Déterminons une équation cartésienne pour chacune des médiatrices des segments [AB] et [AC].**

La médiatrice $m_1$ du segment [AB] est la droite passant par son milieu I, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ or le repère est orthonormé donc il existe un réel c tel que $1x + 0y + c = 0$
*avec* $c = -1x_I - 0y_I = (-1) \times \frac{x_A+x_B}{2} = -\frac{1}{2}$ (car I est le milieu du segment [AB] ) donc $m_1 : x - \frac{1}{2} = 0$
De même, la médiatrice $m_2$ du segment [AC] est la droite passant par son milieu J, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc il existe un réel c' tel que $-5x - 2y + c' = 0$ *avec* $c' = 5x_J + 2y_J = 5 \times \frac{x_A+x_C}{2} + 2 \times \frac{y_A+y_C}{2}$
(car J est le milieu du segment [AC] ) ie $c' = 5 \times \frac{-5}{2} + 2 \times \frac{4}{2} = -\frac{25}{2} + \frac{8}{2} = -\frac{17}{2}$ donc $m_2 : -5x - 2y - \frac{17}{2} = 0$
donc $m_2 : 10x + 4y + 17 = 0$

- **Déterminons alors les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.**

*Le triangle ABC est non aplati donc le centre* $\Omega$ *du cercle circonscrit au triangle ABC existe* et $\Omega$ est alors le point d'intersection des médianes $m_1$ *et* $m_2$ donc ses coordonnées $(x_\Omega, y_\Omega)$ vérifient les deux équations du 2a
Ainsi, $x_\Omega - \frac{1}{2} = 0$ *et* $10x_\Omega + 4y_\Omega + 17 = 0$ ie $x_\Omega = \frac{1}{2}$ *et* $y_\Omega = \frac{1}{4}(-10x_\Omega - 17) = \frac{1}{4}(-5 - 17) = -\frac{11}{2}$
Donc les coordonnées du point $\Omega$ sont $(\frac{1}{2}; -\frac{11}{2})$

3. **a. Déterminons une équation cartésienne des médianes issues de A et de B du triangle ABC.**

Soit K le milieu du segment [BC].

La médiane issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et K milieu de [BC], donc de vecteur directeur $\overrightarrow{AK}$. Or K$\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $ie$ $\mathrm{K}(-2\,;2)$ $donc\ \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x_K-x_A\\y_K-y_A\end{pmatrix}$ $ie$ $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

D'où il existe un réel $C'$ tel que x-2y+$C'$=0 soit une équation cartésienne de la médiane (AK) avec $C'=-x_A+2y_A=6$ Donc (AK) : $x-2y+6=0$

La médiane issue de B du triangle ABC est la droite passant par B, de vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}x_J-x_B\\y_J-y_B\end{pmatrix}$

$ie\ \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}-1\\2-3\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-1\end{pmatrix}$ $donc\ \ 2\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$ *est un autre vecteur directeur de cette droite*

Donc il existe un réel $C''$ tel que 2x-7y+$C''$=0 soit une équation cartésienne de la médiane (BJ) où $C''=-2x_B+7y_B=-2+21=19$ Donc (BJ) : $2x-7y+19=0$

**<u>On détermine alors les coordonnées du point G :</u>**

G est le centre de gravité du triangle ABC donc G est l'intersection des médianes (AK) et (BJ) de ce triangle

Donc les coordonnées $(x_G,y_G)$ vérifient les deux équations déterminées au 3.a.

Donc $\begin{cases}x_G-2y_G+6=0 & (L_1)\\2x_G-7y_G+19=0 & (L_2)\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}x_G+\frac{4}{3}=0 & \left(\frac{7L_1-2L_2}{3}\right)\\y_G-\frac{7}{3}=0 & \left(\frac{2L_1-L_2}{3}\right)\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}x_G=-\frac{4}{3}\\y_G=\frac{7}{3}\end{cases}$

donc le point G a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$

**<u>AUTRE IDEE :</u>**

Le point G est le point vérifiant $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ donc $\begin{cases}x_G-x_A=\frac{2}{3}(x_K-x_A)\\y_G-y_A=\frac{2}{3}(y_K-y_A)\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_G=\frac{2}{3}x_K+\frac{1}{3}x_A=-\frac{4}{3}+0=-\frac{4}{3}\\y_G=\frac{2}{3}y_K+\frac{1}{3}y_A=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}\end{cases}$

4. Montrer que les points H, $\Omega$ et G appartiennent à une même droite.

$\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}x_G-x_H\\y_G-y_H\end{pmatrix}$ $ie\ \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+5\\\frac{7}{3}-18\end{pmatrix}$ $ie\ \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\-\frac{47}{3}\end{pmatrix}$ ; de même, $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}x_\Omega-x_H\\y_\Omega-y_H\end{pmatrix}$ $ie\ \overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+5\\-\frac{11}{2}-18\end{pmatrix}$ $ie\ \overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-\frac{47}{2}\end{pmatrix}$

$On\ a\ donc\ \frac{2}{3}\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\-\frac{47}{3}\end{pmatrix}$ $donc\ \ \frac{2}{3}\overrightarrow{H\Omega}=\overrightarrow{HG}$ $donc\ \ les\ vecteurs\ \overrightarrow{H\Omega}\ \ et\ \overrightarrow{HG}\ \ sont\ colinéaires$

*donc les points* $H,\Omega,G$ *sont alignés Donc ces trois points appartiennent à une même droite*

**<u>Remarque</u> :** on aurait pu aussi trouver une équation de la droite (HG) (par exemple) et montrer que les coordonnées de $\Omega$ vérifient cette équation.

5. Soit H' le milieu du segment $[\Omega H]$ et H'' celui du segment [AH]. Soit $H_A$ le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.
   a. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points

$H'\,est\ le\ milieu\ du\ segment\ [\Omega H]\ donc\ H'\left(\frac{x_\Omega+x_H}{2};\frac{y_\Omega+y_H}{2}\right)\ ie\left(\frac{\frac{1}{2}-5}{2};\frac{-\frac{11}{2}+18}{2}\right)\ \ ie\ H'(\frac{-9}{4};\frac{25}{4})$

$H''\,est\ le\ milieu\ du\ segment\ [AH]\ donc\ H''\ \left(\frac{x_A+x_H}{2};\frac{y_A+y_H}{2}\right)\ ie\left(\frac{0-5}{2};\frac{3+18}{2}\right)\ \ ie\ H''(\frac{-5}{2};\frac{21}{2})$

$H_A\ est\ le\ point\ d'intersection\ de\ la\ hauteur\ h_A\ d'équation\ 3x+y-3=0\ et\ de\ la\ droite\ (BC)$

$\mathrm{or\ la\ droite\ (BC)}est\ la\ droite\ passant\ par\ B,de\ vecteur\ directeur\ \overrightarrow{BC}\ de\ coordonnées\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}\ \mathrm{donc\ il\ existe\ un\ réel\ k'}$

$\mathrm{tel\ que\ (BC)\colon 2x-6y+k'=0\ où\ k'=-2x_B+6y_B=16}\ \ donc\ \ \mathrm{(BC)\colon 2x-6y+16=0}$

$\mathrm{Les\ coordonnées\ du\ point\ H_A\ \ vérifient\ donc\ le\ système\ (s)}\colon\begin{cases}3x+y-3=0\\2x-6y+16=0\end{cases}\ donc\ \begin{cases}y=-3x+3\\2x+18x-18+16=0\end{cases}$

$donc\ \ \begin{cases}y=-0.3+3=2.7\\x=0.1\end{cases}\ \ \ \mathrm{donc\ H_A\ a\ pour\ coordonnées}\ (\frac{1}{10};\frac{27}{10})$

   b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre H' et de rayon [H'K]

Dans ce repère orthonormé, ce cercle (C) a pour équation $(x-x_{H'})^2+(y-y_{H'})^2=H'K^2$

$\mathrm{où}\ H'\left(\frac{-9}{4};\frac{25}{4}\right)et\ H'K=\sqrt{(x_K-x'_H)^2+(y_K-y'_H)^2}=\sqrt{\left(-2+\frac{9}{4}\right)^2+\left(2-\frac{25}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{289}{16}}=\sqrt{\frac{290}{16}}$ (car le repère orthonormé) $Donc\ (C): \left(x+\frac{9}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{290}{16}$

donc le cercle (C ) a pour équation cartésienne $x^2+y^2+\frac{9}{2}x-\frac{25}{2}y+\frac{706}{16}=\frac{290}{16}$ $ie\ x^2+y^2+\frac{9}{2}x-\frac{25}{2}y+26=0$

c. Montrer que ce cercle passe par K, H'' et $H_A$.

Comme [H'K] est un rayon du cercle de centre H' alors K est un point du cercle (C ).

De plus $x_{H''}{}^2+y_{H''}^2+\frac{9}{2}x_{H''}-\frac{25}{2}y_{H''}+26=\frac{25}{4}+\frac{441}{4}-\frac{45}{4}-\frac{525}{4}+26=0$ $donc\ H''appartient\ aussi\ à\ ce\ cercle$

De même $x_{H_A}{}^2+y_{H_A}^2+\frac{9}{2}x_{H_A}-\frac{25}{2}y_{H_A}+26=\frac{1}{100}+\frac{729}{100}+\frac{9}{20}-\frac{675}{20}+26=0$ $donc\ H_A\ appartient\ aussi\ à\ ce\ cercle$

Ce cercle passe donc par K, H'' et $H_A$.

**Plus généralement, le cercle de centre H' et de rayon [H'A'] passe par les points A', B' et C' milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] (pieds des 3 médianes de ABC);par les pieds des hauteurs issues de A, B et C du triangle ABC et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] d'où son nom de cercle des neufs points (ou cercle d'Euler).**