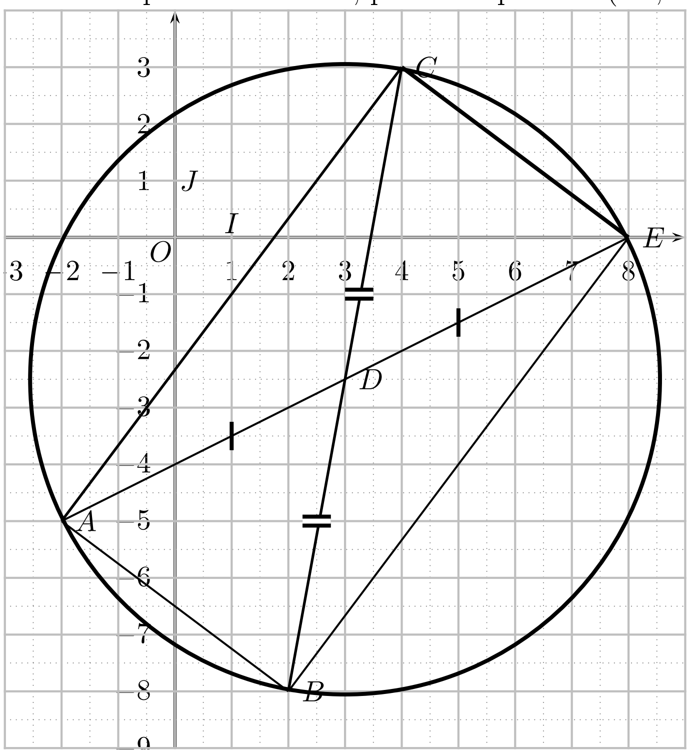
Exercice 1

1. Dans un repère orthonormé, placer les points $A(-2;-5)$, $B(2;-8)$ et $C(4;3)$.



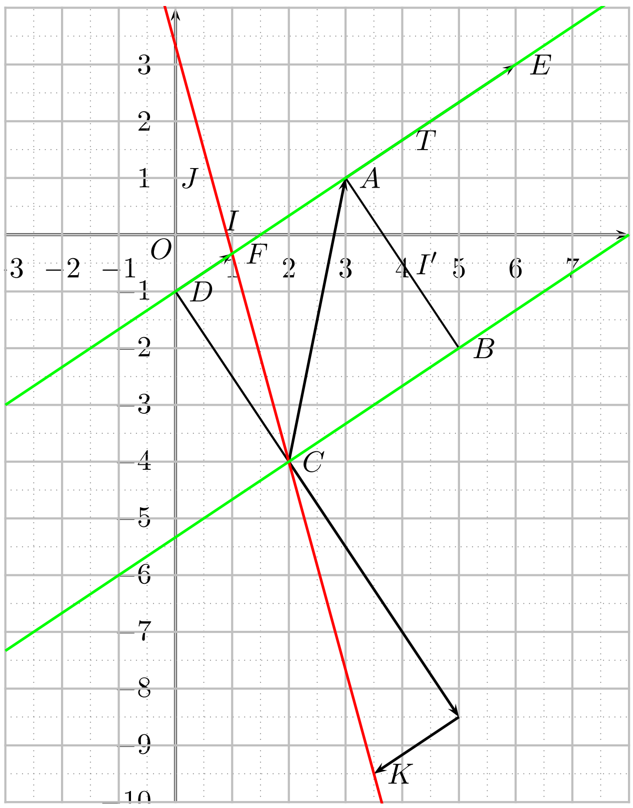
2. Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ donc
$BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=(4-2)^2+(3+8)^2=4+121=125$.
$AB^2+AC^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2=(2+2)^2+(-8+5)^2+(4+2)^2+(3+5)^2=16+9+36+64=125$.
On constate que $BC^2=AB^2+AC^2$. Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
3. On sait que le triangle ABC est rectangle en A. Or dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. Donc D est le milieu de $[BC]$.
$D(x_D;y_D)$ est le milieu de $[BC]$ avec $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ si et seulement si :
$$\begin{cases} x_D=\frac{x_B+x_C}{2} \\ y_D=\frac{y_B+y_C}{2} \end{cases} \begin{cases} x_D=\frac{2+4}{2} \\ y_D=\frac{-8+3}{2} \end{cases} \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=-2,5 \end{cases}$$
Donc le point D a pour coordonnées $(3;-2,5)$.
4. $D(x_D;y_D)$ est le milieu de $[EA]$ avec $E(x_E;y_E)$ et $A(x_A;y_A)$ si et seulement si :
$$\begin{cases} x_D=\frac{x_E+x_A}{2} \\ y_D=\frac{y_E+y_A}{2} \end{cases} \begin{cases} 3=\frac{x_E-2}{2} \\ -2,5=\frac{y_E-5}{2} \end{cases} \begin{cases} 6=x_E-2 \\ -5=y_E-5 \end{cases} \begin{cases} x_E=8 \\ y_E=0 \end{cases}$$
Donc le point E a pour coordonnées $(8;0)$.
5. On sait que D est le milieu de $[AE]$ et de $[BC]$. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors c'est un parallélogramme. Donc $ABEC$ est un parallélogramme.
De plus, le triangle ABC est rectangle en A? Or si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle donc $ABEC$ est un rectangle.

Exercice 2

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;1)$, $B(5;-2)$ et $C(2;-4)$. La figure sera complétée au fur et à mesure, les traits de constructions seront laissés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Partie A

1. (a) Placer les points A, B, C.



(b) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-3 \\ -2-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soit $D(x;y)$ alors $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-x \\ -4-y \end{pmatrix}$.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \begin{cases} 2-x=2 \\ -4-y=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ -y=4-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

2. (a) $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$.
$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2+(-4-1)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$.
$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2+(-4+2)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

(b) On remarque que $AB = BC$, donc le triangle ABC est isocèle en B.
De plus on remarque que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
pour conclure, le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.
Ainsi, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit, donc c'est un rectangle.
Le quadrilatère $ABCD$ a deux côtés consécutifs de mêmes longueurs, donc c'est un losange.
$ABCD$ est à la fois un rectangle et losange donc c'est un carré.

3. Soit I' le milieu de $[AB]$. (ATTENTION : soucis de notation dans le sujet initial, il y a 2 points I : celui du repère et le milieu de $[AB]$).

(a) I' est le milieu de $[AB]$ donc $I'(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$ soit $I'(\frac{3+5}{2};\frac{1-2}{2})$ et $I'(4;-\frac{1}{2})$.

(b) Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Partie B

1. $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} 4-3 \\ \frac{5}{3}-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-5 \\ -4+2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AT}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires, ainsi les droites (BC) et (AT) sont parallèles.

2. (a) I' milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{I'A}+\overrightarrow{I'B}=\overrightarrow{0}$.
   (b) D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CI'}+\overrightarrow{I'A}$ et $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI'}+\overrightarrow{I'B}$.
   Donc $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI'}+\overrightarrow{I'A}+\overrightarrow{I'B}=2\overrightarrow{CI'}$.

3. Soit F et K les points définis par $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
   (a) Placer les points F et K sur la figure précédente.
   (b) $\overrightarrow{CK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   $\overrightarrow{CK}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}=-\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA})=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CF}$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires , et les droites (CK) et (CF) sont parallèles. Ainsi les points C, K, F sont alignés.

Exercice 3

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-1;3)$, $B(0;1)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-4)$.

1. On remarque que $x_A \neq x_B$ et $x_C \neq x_D$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, et ont chacune un coefficient directeur :
   Calcul du coefficient directeur de (AB) : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{1-3}{0-(-1)}=-2$.
   Calcul du coefficient directeur de (CD) : $\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{-4-0}{-1-3}=1$.
   Ces deux coefficients directeurs sont distincts donc les droites sont sécantes.
2. On connaît les coefficients directeurs de chaque droite, il reste à déterminer les ordonnées à l'origine, on les note p_1 et p_2.
   Pour la droite (AB) : $B(0;1)$ appartient à la droite (AB) et donne directement l'ordonnée à l'origine : $p_1=1$. Ainsi, l'équation réduite de la droite (AB) est $y=-2x+1$.
   Pour la droite (CD) : $C(3;0)$ appartient à la droite (CD) et ses coordonnées vérifient l'équation de (CD), donc $y_C=x_C+p_2$ soit $0=3+p_2$ soit $p_2=-3$. Donc, l'équation réduite de la droite (CD) est $y=x-3$.

3. Les coordonnées (x,y) du point d'intersection entre les droites (AB) et (CD) vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3=-2x+1 \\ y=x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2x=1+3 \\ y=x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x=4 \\ y=x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{4}{3}-3 \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$
   Le point d'intersection entre (AB) et (CD) est le point de coordonnées $(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{3})$.
4. Δ est parallèle à (AB) donc elles ont le même coefficient directeur, et son équation réduite est de la forme $y=-2x+p$. Il reste à déterminer p.
   $C(3;0)\in\Delta$ donc $y_C=-2x_C+p$ et $0=-2\times3=p$ ainsi $p=6$. Donc l'équation réduite de Δ est $y=-2x+6$.
5. Soit $E(1;6)$.
   $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}0-(-1)\\1-(-4)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1-(-1)\\6-(-4)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$.
   On remarque que $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DB}$ donc les vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles. Donc les points D, B, E sont alignés.