

THEME 1 : Résolution d'équations.

Exercice 1 : Equations du 1^{er} degré

$$(E_1): 7x + 4 = 3x - 8$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 7x + 4 - 3x = 3x - 8 - 3x$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 4x + 4 = -8$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 4x + 4 - 4 = -8 - 4$$

$$(E_1) \Leftrightarrow 4x = -12$$

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow x = -3$$

Ainsi $S_1 = \{-3\}$.

$$(E_2): 3(y - 2) = 7y - (y + 1)$$

$$(E_2) \Leftrightarrow 3y - 6 = 7y - y - 1$$

$$(E_2) \Leftrightarrow 3y - 6 = 6y - 1$$

$$(E_2) \Leftrightarrow 3y - 6 - 6y = 6y - 1 - 6y$$

$$(E_2) \Leftrightarrow -3y - 6 = -1$$

$$(E_2) \Leftrightarrow -3y - 6 + 6 = -1 + 6$$

$$(E_2) \Leftrightarrow -3y = 5$$

$$(E_2) \Leftrightarrow \frac{-3y}{-3} = \frac{5}{-3}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}$$

Ainsi $S_2 = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Exercice 2 : Equations du second degré

$$(E_3): (3x + 5)(-5x + 10) = 0$$

$$(E_3) \Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad -5x + 10 = 0$$

$$(E_3) \Leftrightarrow 3x + 5 - 5 = 0 - 5 \quad \text{ou} \quad -5x + 10 - 10 = 0 - 10$$

$$(E_3) \Leftrightarrow 3x = -5 \quad \text{ou} \quad -5x = -10$$

$$(E_3) \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-5}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{-5x}{-5} = \frac{-10}{-5}$$

$$(E_3) \Leftrightarrow x = \frac{-5}{3} \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Ainsi $S_3 = \left\{-\frac{5}{3}; 2\right\}$.

$$(E_4): (x + 2)(3x - 5)(-7x + 3) = 0$$

$$(E_4) \Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad -7x + 3 = 0$$

$$(E_4) \Leftrightarrow x = 0 - 2 \quad \text{ou} \quad 3x = 0 + 5 \quad \text{ou} \quad -7x = 0 - 3$$

$$(E_4) \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad 3x = 5 \quad \text{ou} \quad -7x = -3$$

$$(E_4) \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{-7x}{-7} = \frac{-3}{-7}$$

$$(E_4) \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{7}$$

Ainsi $S_4 = \left\{-2; \frac{5}{3}; \frac{3}{7}\right\}$.

Exercice 3

$$(E_5): (x + 1)(5x - 1) - (x + 1)(3x - 12) = 0$$

$$(E_5) \Leftrightarrow (x + 1)[(5x - 1) - (3x - 12)] = 0$$

$$(E_5) \Leftrightarrow (x + 1)(5x - 1 - 3x + 12) = 0$$

$$(E_5) \Leftrightarrow (x + 1)(2x + 11) = 0$$

$$(E_5) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 11 = 0$$

$$(E_5) \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad 2x = -11$$

$$(E_5) \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{11}{2}$$

Ainsi $S_5 = \left\{-1; -\frac{11}{2}\right\}$.

$$(E_6): x^2 + 5x = 0$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x \times x + 5 \times x = 0$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x(x + 5) = 0$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

Ainsi $S_6 = \{0; -5\}$.

Exercice 4 :

$$(E_7) \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 3 = 0$$

on calcule le discriminant du trinôme $-2x^2 + 4x + 3$: $\Delta_7 = 40 = (\sqrt{40})^2 = (2\sqrt{10})^2 > 0$
donc l'équation admet deux solutions distinctes:

$$(E_7) \Leftrightarrow x = \frac{-4 - 2\sqrt{10}}{-4} \text{ ou } x = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{-4} : (E_7) \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \text{ ou } x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ainsi } S_7 = \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2} ; \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \right\}.$$

$$(E_8) \Leftrightarrow 3x + 5 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

On calcule le discriminant du trinôme $2x^2 - 3x - 5$: $\Delta_8 = 49 = 7^2 > 0$
donc l'équation admet deux solutions distinctes:

$$(E_8) \Leftrightarrow x = \frac{3-7}{4} \text{ ou } x = \frac{3+7}{4} : (E_8) \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \quad \text{Ainsi } S_8 = \left\{ -1 ; \frac{5}{2} \right\}.$$

$$(E_9) \Leftrightarrow x^2 + 25 = 10x : (E_9) \Leftrightarrow x^2 + 25 - 10x = 0 : (E_9) \Leftrightarrow x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 = 0$$

$$(E_9) \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 : (E_9) \Leftrightarrow x-5 = 0 : (E_9) \Leftrightarrow x = 5 \quad \text{Ainsi } S_9 = \{ 5 \}.$$

$$(E_{10}) \Leftrightarrow 4(x-2)^2 - 5 = 0 : (E_{10}) \Leftrightarrow 4(x-2)^2 = 5 : (E_{10}) \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{5}{4}$$

$$(E_{10}) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ ou } x-2 = -\sqrt{\frac{5}{4}} : (E_{10}) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5}}{2} + 2$$

$$\text{Ainsi } S_{10} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 ; -\frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \right\}.$$

THEME 2 : Signes d'expressions

1. expressions du 1^{er} degré :

On utilise le théorème :

"pour tous réels a et b avec $a \neq 0$: l'expression $ax + b$ s'annule et change de signe pour le réel $-\frac{b}{a}$; et elle est du signe de a pour tout réel x supérieur à $-\frac{b}{a}$ ".

$A(x) = -5 - 2x$: $-b/a = -5/2$ $a = -2$ donc $a < 0$ d'où :				$B(x) = 9x - 5 - 2(3x + 4) + 5(x - 4) - 1$ $B(x) = 8x - 34$; $-b/a = 17/4$ et $a > 0$ (8)			
x	$-\infty$	$-5/2$	$+\infty$	x	$-\infty$	$17/4$	$+\infty$
$A(x)$	+ 0 -			$B(x)$	- 0 +		

2. expressions du 2nd degré :

On utilise le théorème :

"le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ dépend des signes de son discriminant Δ et de a :
 $\Delta < 0$: le trinôme est du signe de a pour tout réel x ;

$\Delta = 0$: le trinôme est du signe de a pour tout réel $x \neq \frac{-b}{2a}$ et s'annule pour $\frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$: le trinôme s'annule et change de signe pour deux racines x_1 et x_2 , et est du signe de a "à l'extérieur" des racines."

$$A(x) = 2x^2 - 3x + 1 : \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 ; x_1 = \frac{1}{2} ; x_2 = 1 ; a > 0$$

$$B(x) = -2x^2 - 2x + 24 : \Delta = 14^2 ; x_1 = 3 ; x_2 = -4 ; a < 0$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 1 : \Delta = 0 ; x_0 = -\frac{1}{2} ; a > 0 : C(x) > 0 \text{ pour } x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D(x) = 7x^2 + 8x + 5 : \Delta = 64 - 140 = -76 ; a > 0 \text{ donc } D(x) > 0$$

3. Avec tableau de signes

$A(x) = \frac{0,5x-1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 1$, $A(x)$ est du signe de $(0,5x - 1)(x + 1)$ racines : 2 et -1 ; $\Delta > 0$ et $a > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$A(x)$</td><td>+</td><td> </td><td>- 0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	$A(x)$	+		- 0	+
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$							
$A(x)$	+		- 0	+							
$B(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$ pour $x > 2$: $B(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$ du signe de $x - 3$ car pour $x > 2$ $x - 1 > 0$ et $(x - 2)^2 > 0$	<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$B(x)$</td><td> </td><td>- 0</td><td>+</td></tr></table>	x	2	3	$+\infty$	$B(x)$		- 0	+		
x	2	3	$+\infty$								
$B(x)$		- 0	+								
$C(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$ sur $\mathbb{R}$ $x^2 + x + 4 > 0$ car $\Delta = -15$ et $a > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1/2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$C(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	1/2	$+\infty$	$C(x)$	-	0	+		
x	$-\infty$	1/2	$+\infty$								
$C(x)$	-	0	+								
$D(x) = \frac{x^2-x-6}{(2x-1)^2}$ sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$: • $x^2 - x - 6 : \Delta = 25$; racines : -2 et 3 et $a > 0$	• $(2x-1)^2 > 0$ donc $G(x)$ change de signe en 3 <table><tr><td>x</td><td>1/2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$G(x)$</td><td> </td><td>- 0</td><td>+</td></tr></table>	x	1/2	3	$+\infty$	$G(x)$		- 0	+		
x	1/2	3	$+\infty$								
$G(x)$		- 0	+								

4. Lectures graphiques :

Le signe d'une fonction est donné par la position de sa corbe représentative par rapport à l'axe des abscisses ; les variations sont obtenues en regardant si, lorsqu'on parcourt la courbe de droite à gauche, le mouvement est ascendant ou descendant.

signe de $f(x)$:

x	-4	-1	5	7	
$f(x)$	+	0	-	0	+

signe de $g(x)$:

x	-4	-3	3,5	7	
$g(x)$	-	0	+	0	-

tableau de variation de f :

x	-4	2	7
f	5	-2	1

tableau de variation de g :

x	-4	0	7
g	-3	3,5	-3

L'inéquation $f(x) \geq g(x)$ a pour ensemble de solutions $[-4; -2] \cup [4; 7]$ (intervalles sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de $\mathcal{C}_g$)

L'inéquation $g(x) < 3$ a pour ensemble de solution $[-4; -1[\cup]1,5; 7]$ (intervalles sur lesquels $\mathcal{C}_g$ est strictement située en dessous de la droite d'équation $y = 3$).

THEME 3 - Dérivation

exercice 1 : Pour chaque fonction f , calculer $f'(x)$:

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$: $f'(x) = 10x - 3$ (polynôme)

2. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 7$; $f'(x) = 6x^2 - 8x - 3$ (polynôme)

3. $f(x) = 5(2x+3)$; $f'(x) = 10$ (fonction affine)

4. $f(x) = \frac{-x+3}{x^2-5}$; $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $u(x) = -x+3$; $v(x) = x^2-5$; $u'(x) = -1$; $v'(x) = 2x$;
 $f'(x) = \frac{-1(x^2-5) - 2x(-x+3)}{(x^2-5)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x^2-5)^2}$

5. $f(x) = (x^2 + 5x)^2$; $f = u^2$ donc $f' = 2u' \times u$
 $u(x) = x^2 + 5x$ donc $u'(x) = 2x + 1$ $f'(x) = 2(2x+1)(x^2+5x)$

6. $f(x) = (2x-3)^2 \sqrt{x}$; $f = uv$ donc $f' = u'v + uv'$
 $u(x) = (2x-3)^2$; $v(x) = \sqrt{x}$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $u = w^2$ donc $u' = 2w'w$
 $w(x) = 2x-3$ donc $w'(x) = 2$ et $u'(x) = 2 \times 2(2x-3) = 4(2x-3)$
 $f'(x) = 4(2x-3)\sqrt{x} + \frac{(2x-3)^2}{2\sqrt{x}} = \frac{8(2x-3)x + (2x-3)^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x-3)(8x+2x-3)}{2\sqrt{x}}$
 $f'(x) = \frac{(2x-3)(10x-3)}{2\sqrt{x}}$

exercice 2 : Pour chaque fonction f , calculer $f'(x)$ et donner ses variations sur I :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 3$; $I = \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x - 6$.

$f'(x)$: 1^{er} degré ; s'annule pour 3 et $a > 0$:

$f'(x) > 0$ pour $x > 3$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 3$

f est décroissante sur $]-\infty; 3]$ et croissante sur $[3; +\infty[$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $I = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$

f' du 2nd degré ; s'annule pour -3 et 1, $\Delta > 0$ et $a > 0$ donc

$f'(x) > 0$ pour $x < -3$ et pour $x > 1$; $f'(x) < 0$ pour $-3 < x < 1$

f est croissante sur $]-\infty; -3]$ et sur $[1; +\infty[$; f est décroissante sur $[-3; 1]$.

3. $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$; $I =]-\infty; -3[$ $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $u(x) = x-5$; $v(x) = x+3$

$u'(x) = v'(x) = 1$ donc $f'(x) = \frac{1(x+3) - 1(x-5)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2}$:

$f'(x)$ quotient de deux nombres positifs donc $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]-\infty; -3[$.

exercice 3 : Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

1. $f(x) = x^2 + 5x + 3$; $a = 3$; $f'(x) = 2x + 5$; $f(3) = 27$; $f'(3) = 11$

T a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = 11(x-3) + 27$ soit $y = 11x - 6$

2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $a = 0$; $f = \frac{1}{v}$ donc $f' = \frac{-v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$; $f(0) = 1$; $f'(0) = -1$

T a pour équation $y = -1(x-0) + 1$ soit $y = -x + 1$

exercice 4 : lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(0)$; $f(-3)$ et $f(-6)$

$f(0) = 3$; $f(-3) = -6$ et $f(-6) = 3$

(ordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0 ; -3 et -6)

2. valeurs approchées de $f(-4)$ et $f(5)$.

$f(-4) \approx -7,5$; $f(5) \approx -3$

idem pour les points d'abscisses -4 et 5

3. variations de f ?

f décroissante sur $]-\infty; -4]$ et sur $[0; +\infty[$

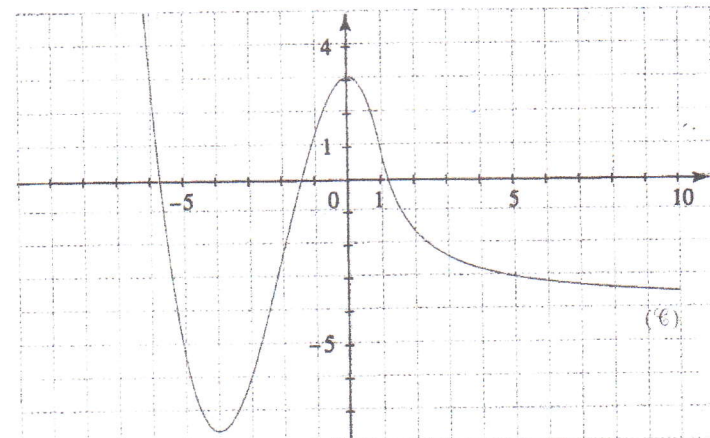
f est croissante sur $[-4; 0]$

4. le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x :

$f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$

$f'(x) > 0$ sur $]-4; 0[$

$f'(x) = 0$ sur $\{-4; 0\}$



Pour le signe de $f'(x)$ on utilise le théorème qui relie le signe de la dérivée avec les variations de la fonction (f' positive lorsque f est croissante, f' négative lorsque f est décroissante)

exercice 5 : VRAI ou FAUX ?

Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-3; 4]$, dont on donne le tableau des variations :

x	-3	-1	1	4
$f(x)$	-2	3	1	4

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

a. $f'(0) < 0$

b. $f'(1) = 1$

c. $f(-3) = -2$

d. $-2 \leq f(-2)$

e. $f'(3) < 0$

f. $f(2) > 0$

a. **VRAI** car f décroissante sur $[-1; 1]$

b. **FAUX** : $f'(1) = 0$ car f change de variation en 1

c. **VRAI** : écrit dans le tableau des variations de f

d. **VRAI** car f croissante sur $[-3; -1]$ et $f(-3) = -2$

e. **FAUX** car f est croissante sur $[1; 4]$

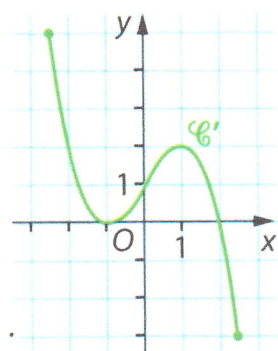
f. **VRAI** car f croissante sur $[1; 4]$ et $f(1) = 1$

exercice 6 : Q.C.M Attention : la courbe donnée est celle de la dérivée f' !

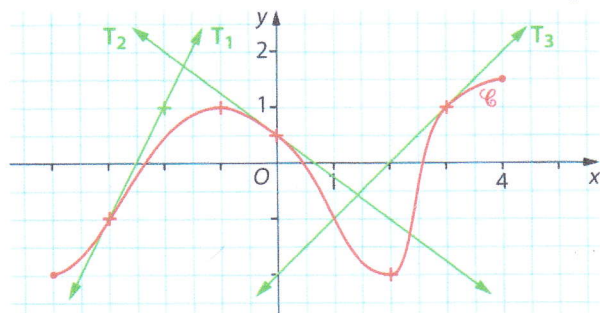
1. $f'(1) = 2$ ($A(1; 2) \in \mathcal{C}'$)

2. $f'(-2) = 2$ car $B(-2; 2) \in \mathcal{C}'$

3. f est croissante sur $[-2,5; 2]$ car f' positive sur cet intervalle ($\mathcal{C}'$ au-dessus de l'axe des abscisses)



exercice 7 : nombres dérivés et tangentes



1. Valeurs de $f(-3)$; $f'(-3)$; $f(0)$; $f'(0)$; $f(3)$, $f'(3)$:

$$f(-3) = -1 ; f'(-3) = 2 ; f(0) = 0,5 ; f'(0) = -\frac{3}{4}$$

$$f(3) = 1 \text{ et } f'(3) = 1$$

Pour lire $f(a)$ on lit l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}$;

Pour lire $f'(a)$, on lit la valeur du coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .

2. Valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 2$ (On cherche les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ pour lesquels la tangente est horizontale, la fonction changeant alors de variations).

3. a. Equation de la droite T_1 :

Equation d'une tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. T_1 est la tangente au point d'abscisse -3 donc $a = -3$; $f(-3) = -1$ et $f'(-3) = 2$. L'équation est donc : $y = 2(x+3) - 1$ soit $y = 2x + 5$

b. Equation de T_2 : (avec $a = 0$; $f(0) = 0,5$ et $f'(0) = -\frac{3}{4}$) : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Equation de T_3 : (avec $a = 3$; $f(3) = 1$ et $f'(3) = 1$) : $y = 1(x-3) + 1$ soit $y = x - 2$

4. tableau des variations :

x	-4	-1	2	4	
f'	+	0	-	0	+
f	-2	1	-2	1.5	

exercice 8 : étudier un bénéfice.

Bénéfice, en centaine d'euros, pour x centaines d'objets est : $B(x) = -3x^2 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1. Tableau des variations :

x	1	5,5	10
signe de B'	+	0	-
B	-24	36,75	-24

a. $B'(x) = -6x + 33$

$$1^{\text{er}} \text{ degré, } a < 0 \text{ et } \frac{-b}{a} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}$$

b. Pour réaliser un bénéfice maximum il faut produire et vendre **550 objets**, le bénéfice maximum est alors **3 675 euros**.

2. a) $B(x) = 0$: équation du 2nd degré avec $\Delta = 33^2 - 4 \times (-3) \times (-54) = 441 = 21^2$

$$\text{l'équation admet deux solutions dans } \mathbb{R} : x_1 = \frac{-33-21}{2 \times (-3)} = 9 \text{ et } x_2 = \frac{-33+21}{-6} = 2$$

2 et 9 sont des réels de $[1 ; 10]$ donc les solutions de l'équation $B(x)$ sont **2 et 9**.

On en déduit que les **points morts** (productions pour lesquelles le bénéfice est nul) sont **200 et 900 objets**.

b) $B(x) \geq 0$: inéquation du 2nd degré avec $\Delta > 0$ et $a < 0$, les racines sont 2 et 9 donc $B(x) \geq 0$ lorsque $x \in [2 ; 9]$ ("signe de $-a$ à l'intérieur des racines")

L'ensemble des solutions de l'inéquation $B(x) \geq 0$ est **[2 ; 9]**

On en déduit que la plage de bénéfice est l'intervalle **[200 ; 900]**