Étude de fonctions - Corrigé

Exercice 1 :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

   (a) $f(x)$ est un trinôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = 0$.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = f(1) = 1^2 - 2 = -1$.
   Or, $a > 0$, donc la fonction f admet pour minimum -1 en 1.
   Elle est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-2)$, donc le trinôme $f(x)$ possède deux racines 0 et 2.
   Or, $a > 0$, donc pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]0; 2[$, $f(x) < 0$

2. (a) La fonction $g = -f$ a des variations contraires à la fonction f,
   donc la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

   (b) Pour tout x, $g(x)$ et $f(x)$ sont opposés ; on a donc :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	

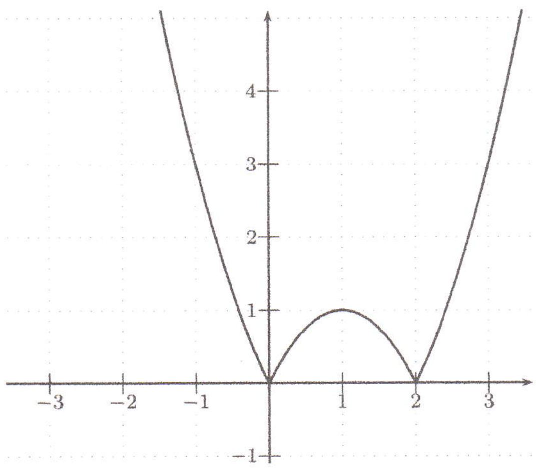
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |f(x)|$.

   (a) Pour tout x,
   si $f(x) > 0$, alors $h(x) = f(x)$ et si $f(x) < 0$, alors $h(x) = -f(x)$ c'est-à-dire $h(x) = g(x)$.
   Donc, pour $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $h(x) = f(x)$ et pour $x \in]0; 2[$, $h(x) = g(x)$.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
variations de h		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   (b) La représentation graphique de la fonction h dans un repère orthonormé est :



Exercice 2 :

1. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
   Si $x \in]0;1[$, alors $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{x} > 0$ donc $g(x) > f(x)$.
   Si $x \in]1;+\infty[$, alors $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$ donc $g(x) < f(x)$.
   Donc sur $]0;1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est "en-dessous de" $\mathcal{C}_g$ et sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est "au-dessus de" $\mathcal{C}_g$

2. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_h$.
   La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc on a :
   Si $x \in]0;1[$, alors $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}} > \sqrt{\dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f(x) > h(x)$.
   Si $x \in]1;+\infty[$, alors $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}} < \sqrt{\dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f(x) < h(x)$.
   Donc sur $]0;1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est "au-dessus de" $\mathcal{C}_h$ et sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est "en-dessous de" $\mathcal{C}_h$

3. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{C}_h$.
   D'après les questions précédentes,
   Si $x \in]0;1[$, alors $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $g(x) > h(x)$.
   Si $x \in]1;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $g(x) < h(x)$.
   Donc sur $]0;1[$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est "au-dessus de" $\mathcal{C}_h$ et sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_g$ est "en-dessous de" $\mathcal{C}_h$

Exercice 3 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

1. La fonction f est définie si et seulement si $-x^2+4x+5 > 0$.
   $-x^2+4x+5$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36$.
   $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{36}}{-2} = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{36}}{-2} = \dfrac{-4+6}{-2} = -1$
   $a < 0$, donc le trinôme est strictement positif entre les racines donc sur l'intervalle $]-1;5[$ et strictement négatif à l'extérieur des racines.

   L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-1;5[$.

2. • $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ et $a = -1$. Donc le trinôme $-x^2+4x+5$ admet un maximum en 2.
   Soit les fonctions u et v définies sur l'intervalle $]-1;5[$ par $u(x) = -x^2+4x+5$ et $v(x) = \sqrt{u(x)}$.
   La fonction u est strictement croissante sur $]-1;2]$ et strictement décroissante sur $[2;5[$.
   • De plus sur l'intervalle $]-1;5[$, on a $u(x) > 0$.
   Si $u(x) \geqslant 0$, la fonction $\sqrt{u}$ a les mêmes variations que u,
   donc v est strictement croissante sur $]-1;2]$ et strictement décroissante sur $[2;5[$.
   • De plus sur l'intervalle $]-1;5[$, $v(x) > 0$ et on a $f = \dfrac{1}{v}$.
   Si $v(x) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{v}$ a des variations contraires à v lorsque v est de signe constant,
   donc f est strictement décroissante sur $]-1;2]$ et strictement croissante sur $[2;5[$.

Exercice 4 : Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{-x^2-3}{x^2+1}$

1. La fonction g est définie si et seulement si $x^2+1 \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $-1 - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{-x^2-1-2}{x^2+1} = \dfrac{-x^2-3}{x^2+1} = g(x)$.

   Donc pour tout x, $g(x) = -1 - \dfrac{2}{x^2+1}$.
3. • Soit $u(x) = x^2+1$ un trinôme du second degré. Il admet un minimum en 0.
   Donc la fonction u est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   • Si $u(x) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{u}$ a des variations contraires à u lorsque u est de signe constant,
   or pour tout x, $u(x) > 0$, donc la fonction $v = \dfrac{1}{u}$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
   • Pour tout x, posons $w(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$, on a $w(x) = \lambda v(x)$ avec $\lambda = -2$.
   Si $\lambda < 0$, la fonction λv a des variations contraires à v,
   donc la fonction w est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   • Pour tout x, on a $g(x) = k + w(x)$ avec $k = -1$.
   Pour tout réel k, la fonction $k + w$ a les mêmes variations que w,
   donc la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

PARTIE 2 - Corrigé

CORRIGE DES DEVOIRS DE VACANCES POUR LES TS

THEME : DERIVATION (3 exercices)

EXERCICE 1 : « CALCULS DE DERIVEES »

✧ **Pour la fonction $f : x \mapsto -2x^7 + \frac{5}{2}x^2 - x - 12$**

Comme f est une fonction polynôme (de degré 7), alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2 \times 7x^6 + \frac{5}{2} \times 2x - 1 = -14x^6 + 5x - 1$.

✧ **Pour la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2 - 5x}{1 - x}$**

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, i.e. sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto x^2 - 5x$ et $v : x \mapsto 1 - x$.

Comme :
* g est le quotient de u par v sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
* u et v sont dérivables sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$;
* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

alors la fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$u(x) = x^2 - 5x$ donc $u'(x) = 2x - 5$

$v(x) = 1 - x$ donc $v'(x) = -1$

$g = \frac{u}{v}$ donc $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

i.e. $g'(x) = \frac{(2x-5)(1-x) - (x^2-5x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 - 5 + 5x + x^2 - 5x}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 5}{(1-x)^2}$

✧ **Pour la fonction $h : x \mapsto x\sqrt{x}$**

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^+$, i.e. sur $[0 ; +\infty[$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

Comme :
* h est le produit de u par v sur $\mathbb{R}^+$;
* u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$;
* v est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, i.e. sur $]0 ; +\infty[$;

alors la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h = uv$ donc $h' = u'v + uv'$

i.e. $h'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

PARTIE 2 Corrigé

Méthode n°2 (plus longue) : k vue comme « le produit (ou le carré) de fonctions dérivables »

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $k(x) = \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 = \left(2\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)$

Etudions d'abord la dérivabilité de la fonction l définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $l(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto 1$

Comme : * l est la somme de 2 u et de v sur $\mathbb{R}^+$;

* u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et v sur $\mathbb{R}^+$;

alors la fonction l est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$u(x) = \sqrt{x}$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = 1$ donc $v'(x) = 0$

$l = 2u + v$ donc $l' = 2u' + v'$

i.e. $l'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Etudions maintenant la dérivabilité de la fonction k :

Comme : * k est le produit de l par l (ou le carré de l) sur $\mathbb{R}^+$;

* l est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;

alors la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, $k = l \times l \ (= l^2)$ donc $k' = l'l + ll' = 2l'l$

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $k'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times (2\sqrt{x} + 1) = = 4 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

✧ **Pour la fonction $m : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+3}$**

La fonction m est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $m(x) = \dfrac{h(x)}{x^2+3}$

Soit la fonction $v : x \mapsto x^2 + 3$.

Comme : * m est le quotient de h par v sur $\mathbb{R}^+$;

* h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et v sur $\mathbb{R}^+$;

* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$;

alors la fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$h(x) = x\sqrt{x}$ donc $h'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (d'après supra)

$v(x) = x^2 + 3$ donc $v'(x) = 2x$

$k = \dfrac{h}{u}$ donc $k' = \dfrac{h'v - hv'}{v^2}$

i.e. $k'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x} \times (x^2+3) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$

d'où $k'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\,(9-x^2)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{\sqrt{x}\,(9-x^2)}{2(x^2+3)^2}$

Comme : * j est le produit de $\frac{1}{5}$ par u sur $\mathbb{R}$;
* u est dérivable sur $\mathbb{R}$;

alors la fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$: $u(x) = x^2 - x + 7$ donc $u'(x) = 2x - 1$

$j = \frac{1}{5}u$ donc $j' = \frac{1}{5}u'$

i.e. $j'(x) = \frac{1}{5}(2x-1) = \frac{2x-1}{5}$

Méthode n°2 (plus longue) : fonction j vue comme le « quotient de deux fonctions dérivables »

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}$ par : $j(x) = \frac{x^2 - x + 7}{5}$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto x^2 - x + 7$ et $v : x \mapsto 5$

Comme : * j est le quotient de u par v sur $\mathbb{R}$;
* u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

alors la fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$u(x) = x^2 - x + 7$ donc $u'(x) = 2x - 1$

$v(x) = 5$ donc $v'(x) = 0$

$j = \frac{u}{v}$ donc $j' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

i.e. $j'(x) = \frac{(2x-1)\times 5 - (x^2 - x + 7)\times 0}{5^2} = \frac{(2x-1)\times 5}{5^2} = \frac{2x-1}{5} = \frac{1}{5}(2x-1)$

✧ **Pour la fonction $k : x \mapsto \left(2\sqrt{x}+1\right)^2$**

Méthode n°1 : fonction k vue comme la « somme de fonctions dérivables »

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $k(x) = \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 = 4x + 4\sqrt{x} + 1$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto 4x$; $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $w : x \mapsto 1$

Comme : * k est la somme de u, de 4 v et de w sur $\mathbb{R}^+$;
* u et w sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et v sur $\mathbb{R}^{+*}$;

alors la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $u(x) = 4x$ donc $u'(x) = 4$

$v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = 1$ donc $w'(x) = 0$

$k = u + 4v + w$ donc $k' = u' + 4v' + w'$

i.e. $k'(x) = 4 + 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 4 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

PARTIE 2 _ Corrigé

✧ **Pour la fonction i : x** $\mapsto 9+\dfrac{1}{x^3}$

Méthode n° 1 : fonction i vue comme « la somme de deux fonctions dérivables »

La fonction i est définie sur $\mathbb{R}^*$, i.e. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, i.e. $]-\infty; 0[\ \cup\ ]0; +\infty[$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto 9$ et $v : x \mapsto x^3$.

Comme * i est la somme de u et de l'inverse de v sur $\mathbb{R}^*$;
* u et v sont dérivables sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$;
* v s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$;

alors la fonction i est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$u(x) = 9$ donc $u'(x) = 0$

$v(x) = x^3$ donc $v'(x) = 3x^2$

$i = u + \dfrac{1}{v}$ donc $i' = u' + \left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' - \dfrac{v'}{v^2}$

i.e. $i'(x) = 0 - \dfrac{3x^2}{(x^3)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

Méthode n°2: fonction i vue comme « le quotient de fonctions dérivables »

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $i(x) = 9 + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{9x^3}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{9x^3+1}{x^3}$

Soient les fonction $u : x \mapsto 9x^3 + 1$ et $v : x \mapsto x^3$.

Comme * i est le quotient de u par v sur $\mathbb{R}^*$;
* u et v sont dérivables sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$;
* v s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$;

alors la fonction i est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$u(x) = 9x^3 + 1$ donc $u'(x) = 9 \times 3x^2 = 27x^2$

$v(x) = x^3$ donc $v'(x) = 3x^2$

$i = \dfrac{u}{v}$ donc $i' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

i.e. $i'(x) = \dfrac{27x^2 \times x^3 - (9x^3+1) \times 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{27x^5 - 27x^5 - 3x^2}{x^6} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

✧ **Pour la fonction j : x** $\mapsto \dfrac{x^2 - x + 7}{5}$

Méthode n°1 : fonction j vue comme le « produit d'un réel par une fonction dérivable »

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $j(x) = \dfrac{1}{5}\left(x^2 - x + 7\right)$.

Soit la fonction $u : x \mapsto x^2 - x + 7$

EXERCICE 2: « TANGENTES »

Explications pour construire les points A, B, C, D et E (non demandées)

On utilise les $1^{ère}$ et $2^{ème}$ lignes du tableau.

Comme g(- 7) = - 6, alors la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées (- 7 ; - 6) : c'est le point A.

De même, on a : B (- 3 ; - 1) ; C (0 ; - 2) ; D (3 ; - 3) et E (5 ; 0).

Explications (non demandées) pour construire les tangentes en ces points

On utilise les $1^{ère}$ et $3^{ème}$ lignes du tableau.

** La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse – 7 a pour coefficient directeur g'(- 7) i.e. 4.*

*i.e la tangente à $\mathscr{C}$ en A (- 7 ; - 6) passe aussi par le point P (- 7 **+ 1** ; - 6 **+ 4**) i.e. P (- 6 ; - 2).*

** La tangente à $\mathscr{C}$ en B (- 3 ; - 1) a pour coefficient directeur g'(- 3) i.e. 0.*

Ainsi la tangente à $\mathscr{C}$ en B est parallèle à l'axe des abscisses.

** La tangente à $\mathscr{C}$ en C (0 ; - 2) a pour coefficient directeur g'(0) i.e. – 1.*

*Elle passe donc aussi par le point R (0 **+ 1** ; - 2 **– 1**) i.e. par R (1 ; - 3).*

** La tangente à $\mathscr{C}$ en D (3 ; - 3) a pour coefficient directeur g'(3) i.e.0.*

Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.

** La tangente à $\mathscr{C}$ en E (5 ; 0) a pour coefficient directeur g'(5) i.e. 3.*

*Elle passe donc aussi par le point S (5 **+ 1** ; 0 **+ 3**) i.e. par S (6 ; 3).*

Explications (non demandées) pour finir un tracé de $\mathscr{C}$

Etudions les variations de g :

Comme g est monotone sur] - ∞; - 3], alors sa fonction dérivée est de signe constant sur] - ∞; - 3].

Or g'(- 7) = 4

donc g' est positive sur] - ∞; - 3], et par conséquent g est croissante sur] - ∞; - 3].

De même, on montrerait que g est décroissante sur [- 3 ; 2] et croissante sur [2 ; + ∞[.

Pour tracer une représentation graphique de g, il faut donc :

** faire passer $\mathscr{C}$ par les points A, B, C, D et E ;*

** prendre soin de respecter les directions données par les tangentes aux voisinages de ces points ;*

** respecter les variations de la fonction g déterminées ci-dessus.*

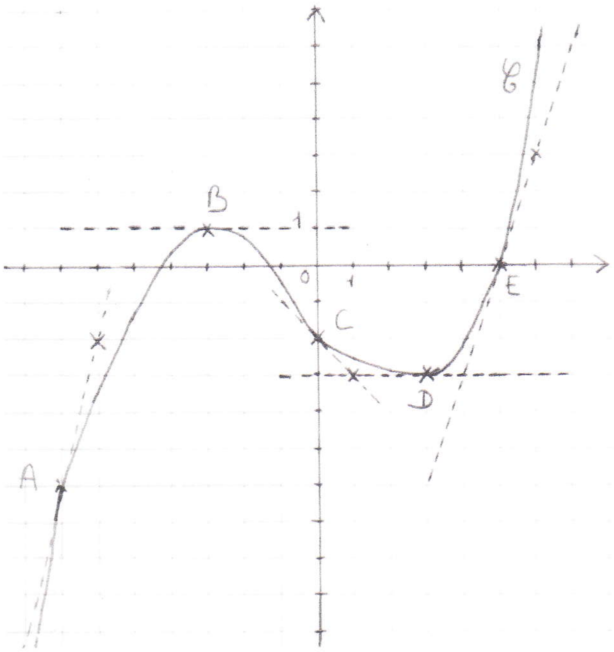
Remarque

La représentation graphique de g qui suit n'est qu'une des nombreuses possibilités qui existent, tout en respectant les trois conditions ci-dessus.

N'hésitez donc pas à demander à un professeur de vérifier votre tracé.

⇨

1) a) b) c)



2) a) <u>Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe 𝒞 au point d'abscisse 5.</u>

L'équation réduite de la tangente à 𝒞 au point D d'abscisse 5 est :

y = g'(a) (x – a) + g(a)   avec a = 3
y = g'(5) (x – 5) + g(5)
y = 3 (x – 5) + 0
y = 3 x - 15

b) <u>Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe 𝒞 au point A.</u>

L'équation réduite de la tangente à 𝒞 au point A d'abscisse - 7 est :

y = g'(a) (x – a) + g(a)   avec a = - 7
y = g'(- 7) (x + 7) + g(- 7)
y = 4 (x + 7) - 6
y = 4 x + 22

<u>Exercice 3 : « Optimisation et encadrement »</u>

a) <u>Ensemble de définition 𝒟 de la fonction *V* ?</u>

𝒟 = [0 ; 0,6]   (mais la réponse 𝒟 =] 0 ; 0,6 [est également acceptable)

<u>Explications (non demandées) :</u>

Pour pouvoir enlever un carré de côté x à chaque coin de la plaque carrée mesurant 1,2 m de côté, il faut que cette longueur 1,2 puisse être diminuée de 2 x et que la longueur 1,2 – 2 x reste positive.
Or   1,2 – 2 x > 0   ⇔   1,2 > 2 x   ⇔   0,6 > x   ⇔   x < 0,6.

b) <u>Soit x ∈ 𝒟. Exprimons *V*(x) en fonction de x.</u>

Le fond de la boîte parallélépipédique est un carré de coté (1,2 – 2 x) et sa hauteur est x.

Donc le volume (en m³) de cette boîte est : $V(x) = (1{,}2 - 2x)^2 \times x$.

c) Etudions les variations de V sur [0 ; 0,6].

Pour tout x de [0 ; 0,6], $V(x) = x\,(1{,}2 - 2x)^2 = x\,(1{,}44 - 4{,}8x + 4x^2) = 4x^3 - 4{,}8x^2 + 1{,}44x$.

Ainsi la fonction V est une fonction polynôme (de degré 3), restreinte à l'intervalle [0 ; 0,6].

Donc V est dérivable sur [0 ; 0,6].

De plus, pour tout x de [0 ; 0,6], $V'(x) = 4 \times 3x^2 - 4{,}8 \times 2x + 1{,}44 = 12x^2 - 9{,}6x + 1{,}44$.

Etudions le signe de ce trinôme du 2nde degré :

$12x^2 - 9{,}6x + 1{,}44 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 12$ ($a \neq 0$), $b = -9{,}6$ et $c = 1{,}44$

Donc son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-9{,}6)^2 - 4 \times 12 \times 1{,}44 = 92{,}16 - 69{,}12 = 23{,}04$.

Comme $\Delta > 0$, alors ce trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9{,}6)-\sqrt{23{,}04}}{2\times 12} = \frac{9{,}6-4{,}8}{24} = \frac{4{,}8}{24} = 0{,}2$$

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9{,}6+4{,}8}{24} = \frac{14{,}4}{24} = 0{,}6$$

De plus, ce trinôme sera du signe a, i.e. positif, sauf sur [0,2 ; 0,6].

D'où le tableau suivant :

x	0		0,2		0,6
Signe de $V'(x)$		+	0	-	0
Variations de V	0	↗	0,128	↘	0

$V(0) = 0$
$V(0{,}2) = 0{,}128$
$V(0{,}6) = 0$

Ainsi, la fonction V est strictement croissante sur [0 ; 0,2] et strictement décroissante sur[0,2 ; 0,6].

d) Comment obtenir une boîte de volume maximal ?

D'après le tableau ci-dessus, la fonction V admet 0,128 comme maximum et il est atteint en 0,2.

Cela signifie que pour obtenir une boîte de volume maximal, il faut enlever au chaque coin de la plaque un carré de côté mesurant 0,2 m i.e. 20 cm.

Le volume maximal de la boîte est alors égal à 0,128 m^3, i.e. 128 dm^3.

e) Déterminons un encadrement de $V(x)$ lorsque x appartient à [0,1 ; 0,4].

Soit $x \in [\,0{,}1 ; 0{,}4\,]$.

D'après le tableau ci-dessus : * le maximum de V est alors 0,128 ;
* le minimum de V est soit $V(0{,}1)$, soit $V(0{,}4)$;

Or $V(0{,}1) = 0{,}1$ et $V(0{,}4) = 0{,}064$

Ainsi $0{,}064 \leq V(x) \leq 0{,}128$

Correction des exercices de révision sur la géométrie vectorielle

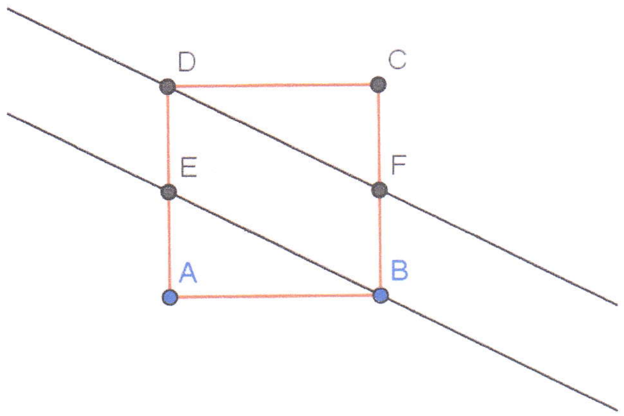
Dans toute la correction,

- pour tout point M du plan, on désignera par x_M l'abscisse du point M et y_M l'ordonnée du point M
- pour tout vecteur $\vec{v}$ du plan, on désignera par $x_{\vec{v}}$ l'abscisse du vecteur $\vec{v}$ et $y_{\vec{v}}$ l'ordonnée du vecteur $\vec{v}$.
- L'abréviation (officielle) « i.e. » signifie c'est-à-dire

Exercice 1 : Soit ABCD un carré non aplati dont la longueur des côtés vaut a u.l. (ie unité de longueur)

Soit E le milieu de [AD] et F celui de [BC]

1. Faire une figure.



2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les droites (EB) et (DF) ?

Les droites (EB)et (DF) SEMBLENT être parallèles.

3. Cette question vise à prouver la conjecture à l'aide de 4 méthodes différentes (les questions a., b., c. et d. sont par conséquent indépendantes)

a. Méthode 1 : i. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Si ces deux vecteurs étaient colinéaires alors les points A, B, D seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

ii. Décomposer alors les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ n'étant pas colinéaires, il est alors possible de décomposer tous les autres vecteurs en fonction d'eux

En particulier,

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \text{ (relation de Chasles)}$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \text{ (car } E \text{ est le milieu de } [AD])$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \text{ (relation de Chasles)}$$
$$= \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (car } F \text{ est le milieu de } [CB])$$
$$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \left(\begin{array}{c}\text{car } ABCD \text{ est un carré} \\ \text{donc } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\end{array}\right)$$

iii. Conclure.

Comme $\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires donc les droites (DF) et (EB)sont parallèles

b. Méthode 2 : i. Justifier que $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est un repère du plan

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$ étaient colinéaires alors les points D, C, A seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est un repère du plan.

ii. Déterminer les coordonnées des points D, C, B,A, E et F dans ce repère

D est l'origine du repère donc D a pour coordonnées(0,0) $[\text{en effet}, \overrightarrow{DD} = \vec{0} = 0\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}]$

C a pour coordonnées (1,0) $[\text{car } \overrightarrow{DC} = 1\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}]$

B a pour coordonnées (1,1) [car ABCD est un carré donc $\overrightarrow{DB} = 1\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}$ d'après la règle du parallélogramme]

A a pour coordonnées (0,1) $[\text{car } \overrightarrow{DA} = 0\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}]$

E est le milieu du segment [AD] donc E $\left(\frac{x_A + x_D}{2}; \frac{y_A + y_D}{2}\right)$ donc E $\left(\frac{0+0}{2}; \frac{1+0}{2}\right)$ ie E a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

F est le milieu du segment [CB] donc F $\left(\frac{x_C + x_B}{2}; \frac{y_C + y_B}{2}\right)$ donc F $\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ ie F a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

iii. Conclure

Alors le vecteur $\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_E \\ y_B - y_E \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

De même le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ (car D est l'origine du repère)ie $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires d'où les droites (EB)et (DF) sont parallèles.

c. Méthode 3 : i. Justifier que $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ est un repère du plan

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ étaient colinéaires alors les points B, C, A seraient alignés et par conséquent le carré ABCD serait aplati, ce qui est contradictoire avec l'énoncé donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ est un repère du plan.

ii. Déterminer une équation cartésienne des droites (EB) et (DF) dans ce repère

Dans ce nouveau repère, on montrerait comme au b. ii. que le point D a pour coordonnées $(1,1), C(1,0), A(0,1), B(0,0), E\left(\frac{1}{2},1\right), F(\frac{1}{2};0)$

Or la droite (EB) est la droite passant par E, de vecteur directeur $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}x_B-x_E\\y_B-y_E\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

Donc il existe un réel c tel que $(EB): -x+\frac{1}{2}y+c=0$

Mais B appartient à la droite (EB) donc ses coordonnées vérifient toute équation de la droite (EB), en particulier $-x+\frac{1}{2}y+c=0$

donc $-x_B+\frac{1}{2}y_B+c=0$ ie $c=x_B-\frac{1}{2}y_B=0-0=0$

Donc UNE équation cartésienne de la droite (EB) est $-x+\frac{1}{2}y=0$

De même la droite (DF) est la droite passant par D, de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}x_F-x_D\\y_F-y_D\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-1\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

Donc il existe un réel c' tel que $(DF): -x+\frac{1}{2}y+c'=0$

Mais D appartient à la droite (DF) donc ses coordonnées vérifient toute équation de la droite (DF) en particulier $-x+\frac{1}{2}y+c'=0$

donc $-x_D+\frac{1}{2}y_D+c'=0$ donc $c=x_D-\frac{1}{2}y_D=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Donc UNE équation cartésienne de la droite (DF) est $-x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0$

iii. Conclure.

1ère idée : *les droites (DF) et (EB) ont même coefficient directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ donc ces deux droites sont parallèles.

2nde idée

Si ces deux droites n'étaient pas parallèles alors elles seraient sécantes (car on raisonne avec des droites du plan qui ne peuvent par conséquent qu'être sécantes ou parallèles) et les coordonnées de leur point d'intersection vérifieraient le système suivant

$\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0\\-x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0\end{cases}$ ie $\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0\\-x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ donc on aurait $0=-\frac{1}{2}$ ce qui est absurde donc ces deux droites sont parallèles.

d. Méthode 4 : Montrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme Conclure.

or E est le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et F est le milieu de [BC] donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FB}$

comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FB}$

d'où DEBF est un parallélogramme donc les droites (BE) et (DF) sont parallèles

Exercice 2 : Soit ABC un triangle non aplati. Soit D le point du plan défini par $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

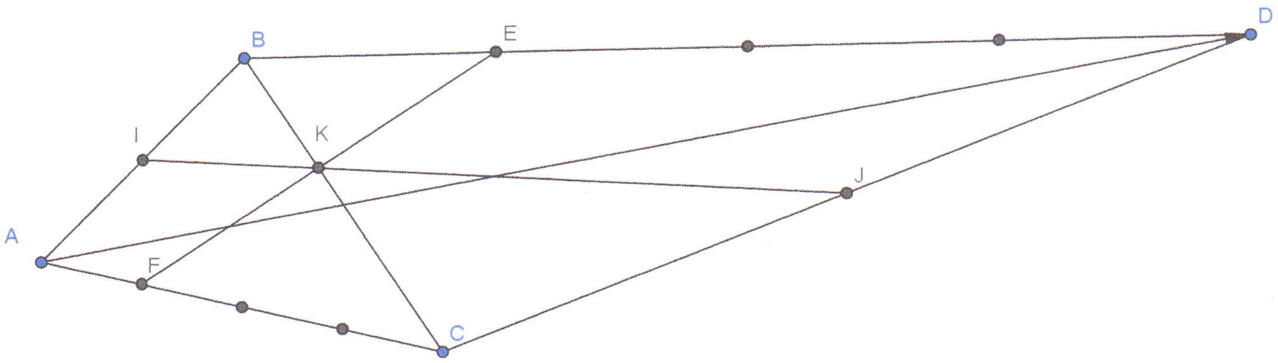
Soit I le milieu du segment [AB], J celui de [CD].

Soit E le point du plan tel que $3\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ et F celui défini par $\overrightarrow{FA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. Soit K le milieu du segment [EF].

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les points I, K et J ?

On a $3\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ donc $4\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ (relation de Chasles) donc pour construire E, on utilise la relation $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

On a $\overrightarrow{FA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ donc $3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ donc $4\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (relation de Chasles) donc pour construire F, on utilise la relation $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



On peut donc conjecturer que les points I, K et J sont alignés.

PARTIE 3 - GEOMETRIE

2. Preuve de cette conjecture à l'aide de trois méthodes différentes :

   a. Méthode 1 : i. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base.

Le triangle ABC n'est pas aplati donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base.

ii. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ *et* $\overrightarrow{IJ}$ dans cette base :

* *D'une part, on a alors* $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$ *(car K est le milieu de [EF]) donc* $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF})$ (relation de Chasles)
or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ *donc* $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC})$ (cf le 1.) *donc* $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$
Or $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$(relation de Chasles) donc $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}$(par définition de D) ie $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
Donc $\overrightarrow{IK} == \frac{1}{8}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{8}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

- D'autre part, on a de même $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC})$ (car J est le milieu de [CD]) donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$
  Or $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ *(vu ci – dessus)* D'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

iii. Conclure

On a alors $\frac{1}{4}\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{IK}$ *donc les vecteurs* $\overrightarrow{IK}$ *et* $\overrightarrow{IJ}$ *sont colinéaires donc les points I, J, K sont alignés.*

   b. Méthode 2 : i. Justifier que $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère.

Le triangle ABC n'est pas aplati donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires
Donc $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère.

ii. Déterminer les coordonnées des points I, K, J dans ce repère

Dans ce repère, B a pour coordonnées (0,0) (car c'est l'origine du repère), A a pour coordonnées (1,0) $(car\ \overrightarrow{BA} = 1\overrightarrow{BA} + 0\overrightarrow{BC})$
et C a pour coordonnées (0,1) $(car\ \overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA})$

De plus, $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ *donc* $\begin{cases} x_D - x_A = 2(x_C - x_A + x_B - x_A) \\ y_D - y_A = 2(y_C - y_A + y_B - y_A) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_D = 2x_C - 3x_A + 2x_B \\ y_D = 2y_C - 3y_A + 2y_B \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_D = 0 - 3 + 0 \\ y_D = 2 - 0 + 0 \end{cases}$

Donc D a pour coordonnées (-3 ;2)

(autre idée $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ *(relation de Chasles) donc* $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ *(par définition de D)*
donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ *(relation de Chasles) donc* $\overrightarrow{BD} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ *donc D(−3; 2) dans le repère* $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.)

Or I est le milieu du segment [AB] donc $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ *ie* $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ *et J est le milieu de [CD] donc* $J\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}\right)$ *ie* $J\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

De plus, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ *donc* $\begin{cases} x_E - x_B = \frac{1}{4}(x_D - x_B) \\ y_E - y_B = \frac{1}{4}(y_D - y_D) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_E - 0 = \frac{1}{4}(-3 - 0) \\ y_E - 0 = \frac{1}{4}(2 - 0) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_E = -\frac{3}{4} \\ y_E = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $E(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$

(autre idée : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ *et D(−3; 2) dans* $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ *donc* $\overrightarrow{BD} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ *donc* $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}(-3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *donc* $E\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$)

De plus, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *donc* $\begin{cases} x_F - x_A = \frac{1}{4}(x_C - x_A) \\ y_F - y_A = \frac{1}{4}(y_C - y_A) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_F - 1 = \frac{1}{4}(0 - 1) \\ y_F - 0 = \frac{1}{4}(1 - 0) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x_F = \frac{3}{4} \\ y_F = \frac{1}{4} \end{cases}$ *donc* $F(\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$

(autre idée : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ *(relation de Chasles) ie* $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *(par construction de F) ie* $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles) ie $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ *donc* $F\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$ *dans la base* $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$)

Or K est le milieu du segment [EF] donc $K\left(\frac{x_E + x_F}{2}, \frac{y_E + y_F}{2}\right)$ *ie* $K\left(0; \frac{3}{8}\right)$

iii. Conclure

Dans ce repère, $\overrightarrow{IK}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_K - x_I \\ y_K - y_I \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} - 0 \end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

De même on a $\overrightarrow{IJ}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - 0 \end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{3}{8} \times 4 \end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IK}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ *et* $\overrightarrow{IJ}$ *sont colinéaires donc les points I, J, K sont alignés.*

   c. Méthode 3 : On reprendra les coordonnées des points I, K et J dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ trouvées au b.

   i. Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK).

(IK) est la droite passant par le point I de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, *de vecteur directeur* $\overrightarrow{IK}$ *de coordonnées* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

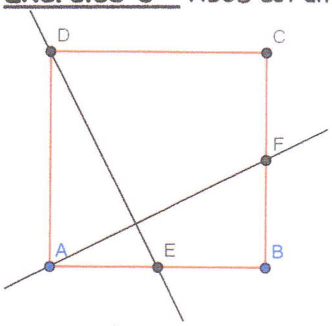
Donc il existe un réel c tel que la droite (IK) est pour équation cartésienne $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y + c = 0$ *avec* $c = -\frac{3}{8}x_I - \frac{1}{2}y_I = -\frac{3}{16}$
Donc (IK) : $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{16} = 0$ *donc* $6x + 8y - 3 = 0$ est une autre équation cartésienne de la droite (IK)

ii. Conclure

Comme $6x_J + 8y_J - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$ alors les coordonnées du point J vérifient une équation cartésienne de la droite (IK)

Donc J appartient à la droite (IK) donc les points I, J, K sont alignés.

Exercice 3 : ABCD est un carré non aplati, E et F sont les milieux des segments [AB] et [BC].



1) $1^{\text{ère}}$ méthode : Calculer $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}$ en décomposant judicieusement ces deux vecteurs. Puis conclure.

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AE}$ (par bilinéarité du produit scalaire)

Or E est le milieu de [AB] et F celui de [BC] donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

Mais ABCD est un carré donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, d'une part, et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, d'autre part, sont orthogonaux

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0$ donc *donc* $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 0$ *(car ABCD est un carré donc* $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *colinéaires de même sens avec* $BC = BA = AB$ *).*

Comme $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = 0$ *alors les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.*

2) 2^{nde} méthode : i. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère

ABCD est un carré non aplati donc les points A, B et D ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *ne sont pas colinéaires*

Donc $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère.

ii. Déterminer les coordonnées des points A, F, E et D dans ce repère. Puis conclure.

Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$,

A a pour cordonnées (0,0) (car A est l'origine du repère), B(1,0) (car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$*), D(0,1) (car* $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$*)*

Comme ABCD est un carré alors ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *donc C(1,1)*

Or E est le milieu du segment [AB] donc $E\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ *ie* $E\left(\frac{1}{2};0\right)$ *et F est le milieu de [BC] donc* $F\left(\frac{x_C+x_B}{2};\frac{y_C+y_B}{2}\right)$ *ie* $F(1;\frac{1}{2})$

Dans ce repère orthonormé (car ABCD est un carré), on a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F - x_A\\ y_F - y_A\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E - x_D\\ y_E - y_D\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = x_{\overrightarrow{AF}}x_{\overrightarrow{DE}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{DE}} = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$ *donc* les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{DE}$ *sont orthogonaux*

donc les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

1) $3^{\text{ème}}$ méthode : On considère que ABCD est un carré direct non aplati.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE})$ puis conclure.

ABCD est un carré et F est le milieu de [BC] donc ABF est rectangle en B avec BF=$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BA$ *donc* $\tan(\widehat{FAB}) = \frac{FB}{AB} = \frac{1}{2}$

De même E est le milieu de [AB] donc ADE est rectangle en A avec AE=$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD$ *donc* $\tan(\widehat{ADE}) = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$

Donc $\tan(\widehat{FAB}) = \tan(\widehat{ADE})$ *donc* $\widehat{FAB} = \widehat{ADE}$ *avec* $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF})$ *et* $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *directs*

Donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}) = \widehat{FAB} = \widehat{ADE} = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *avec* $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}) \equiv -(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF})\ [2\pi]$ *donc* $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}) \equiv -(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})\ [2\pi]$

D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{DE}) \equiv (\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DE})\ [2\pi]$

Ie $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{DE}) \equiv -(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}) + \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DE}) + \pi\ [2\pi]$ *ie* $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{DE}) \equiv \frac{3\pi}{2} - 2\pi\ [2\pi]$ *ie* $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{DE}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Donc une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{DE})$ *vaut* $-\frac{\pi}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{DE}$ *sont orthogonaux*

donc les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 4 : Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans lequel les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées (0;3) ; (1 ;3) et (-5 ;1). Soit H le point de coordonnées (-5 ;18)

1. a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

L'orthocentre d'un triangle étant le point de concours de hauteurs d'un triangle non aplati, il suffit ici de montrer que le point H appartient à deux des trois hauteurs de ce triangle et à montrer que le triangle est non aplati.

or dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, le vecteur* $\overrightarrow{AH}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}x_H - x_A\\ y_H - y_A\end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix}-5\\ 15\end{pmatrix}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{BC}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}x_C - x_B\\ y_C - y_B\end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix}-6\\ -2\end{pmatrix}$

Comme ce repère est orthonormé alors $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{AH}}x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AH}}y_{\overrightarrow{BC}} = (-5) \times (-6) + 15 \times (-2) = 30 - 30 = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A

PARTIE 3 - GEOMETRIE

De même $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x_H-x_B\\y_H-y_B\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=x_{\overrightarrow{BH}}x_{\overrightarrow{AC}}+y_{\overrightarrow{BH}}y_{\overrightarrow{AC}}=-6\times(-5)+15\times(-2)=30-30=0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc la droite (BH) est la hauteur du triangle ABC issue de B

Or les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car $x_{\overrightarrow{BC}}y_{\overrightarrow{AC}}-y_{\overrightarrow{BC}}x_{\overrightarrow{AC}}=(-6)\times(-2)-(-2)\times(-5)=12-10=2$)

donc les points A, B, C ne sont pas alignés donc les hauteurs (AH) et (BH) sont sécantes en un point : l'orthocentre du triangle ABC

Conclusion : H appartient à deux des trois hauteurs du triangle ABC, H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

b. Déterminer une équation de la hauteur h_A issue du sommet A du triangle ABC.

Comme H est l'orthocentre de ce triangle alors *la hauteur h_A issue de A est la droite (AH) ie la droite passant par A, de vecteur directeur $\overrightarrow{AH}$ ayant pour coordonnées* $\begin{pmatrix}x_H-x_A\\y_H-y_A\end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix}-5\\15\end{pmatrix}$ donc il existe un réel k tel que $(AH): 15x+5y+k=0$ où $k=-15x_A-5y_A$

donc $k=-15$ *Donc* $(AH): 15x+5y-15=0$ donc $(AH): 3x+y-3=0$

(autre idée : la hauteur (AH) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A; ie la droite de vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ *dans un repère orthonormé donc il existe un réel k' tel que* $(AH): -6x-2y+k'=0$ *avec* $k'=6x_A+2y_A=0+6=6$

donc $(AH): -6x-2y+6=0$)

2. a. Déterminer une équation cartésienne pour chacune des médiatrices des segments [AB] et [AC].

La médiatrice m_1 du segment [AB] est la droite passant par son milieu I, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ *ie* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Comme le repère est orthonormé alors il existe un réel c tel que m_1: $1x+0y+c=0$ *avec* $c=-1x_I-0y_I=(-1)\times\frac{x_A+x_B}{2}=-\frac{1}{2}$

(car I est le milieu du segment [AB]) donc $m_1 : x-\frac{1}{2}=0$

De même, la médiatrice m_2 du segment [AC] est la droite passant par son milieu J, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$

alors il existe un réel c' tel que $m_2: -5x-2y+c'=0$ *avec* $c'=5x_J+2y_J=5\times\frac{x_A+x_C}{2}+2\times\frac{y_A+y_C}{2}$ (car J milieu du segment [AC])

ie $c'=5\times\frac{-5}{2}+2\times\frac{4}{2}=-\frac{25}{2}+\frac{8}{2}=-\frac{17}{2}$ donc $m_2 : -5x-2y-\frac{17}{2}=0$ donc $m_2 : 10x+4y+17=0$

b. En déduire les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

Comme le triangle ABC est non aplati alors le centre du cercle circonscrit au triangle ABC existe

Donc le point Ω est alors le point d'intersection des médianes m_1 *et* m_2

Donc ses coordonnées (x_Ω, y_Ω) vérifient les deux équations trouvées au 2.a.

D'où $x_\Omega-\frac{1}{2}=0$ *et* $10x_\Omega+4y_\Omega+17=0$ ie $x_\Omega=\frac{1}{2}$ *et* $y_\Omega=\frac{1}{4}(-10x_\Omega-17)=\frac{1}{4}(-5-17)=-\frac{11}{2}$

Donc les coordonnées du point Ω sont $(\frac{1}{2};-\frac{11}{2})$

3. a. Déterminer des équations cartésiennes des médianes issues de A et de B du triangle ABC. Soit K le milieu du segment [BC].

La médiane issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et K milieu de [BC], donc de vecteur directeur $\overrightarrow{AK}$

Or $K(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2})$ ie $K(-2;2)$ *donc* $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x_K-x_A\\y_K-y_A\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Donc il existe un réel C tel que (AK) : x-2y+C=0 où C= $-x_A+2y_A=6$ Donc (AK) : $x-2y+6=0$

La médiane issue de B du triangle ABC est la droite passant par B, de vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}x_J-x_B\\y_J-y_B\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}-1\\2-3\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-1\end{pmatrix}$

donc $2\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$ *est un autre vecteur directeur de (BJ)* donc il existe un réel C ' tel que (BJ) : 2x-7y+C '=0

où C '$=-2x_B+7y_B=-2+21=19$ Donc (BJ) : $2x-7y+19=0$

b. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?

G est le centre de gravité du triangle ABC donc G est l'intersection des médianes (AK) et (BJ) de ce triangle

Donc les coordonnées (x_G, y_G) vérifient les deux équations déterminées au 3.a.

Donc $\begin{cases}x_G-2y_G+6=0 & (L_1)\\2x_G-7y_G+19=0 & (L_2)\end{cases}$ *donc* $\begin{cases}x_G+\frac{4}{3}=0 & (\frac{7L_1-2L_2}{3})\\y_G-\frac{7}{3}=0 & (\frac{2L_1-L_2}{3})\end{cases}$ *donc* $\begin{cases}x_G=-\frac{4}{3}\\y_G=\frac{7}{3}\end{cases}$ donc le point G a pour coordonnées $(-\frac{4}{3};\frac{7}{3})$

4. Montrer que les points H, Ω et G appartiennent à une même droite.

D'une part $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}x_G-x_H\\y_G-y_H\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+5\\\frac{7}{3}-18\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\-\frac{47}{3}\end{pmatrix}$ *et d'autre part* $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}x_\Omega-x_H\\y_\Omega-y_H\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+5\\-\frac{11}{2}-18\end{pmatrix}$ *ie* $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-\frac{47}{2}\end{pmatrix}$

On a donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\-\frac{47}{3}\end{pmatrix}$ *donc* $\frac{2}{3}\overrightarrow{H\Omega}=\overrightarrow{HG}$ *donc les vecteurs* $\overrightarrow{H\Omega}$ *et* $\overrightarrow{HG}$ *sont colinéaires donc les points H, Ω, G sont alignés*

Donc ces trois points appartiennent à une même droite

Remarque : on aurait pu aussi trouver une équation de la droite (HG) (par exemple) et montrer que les coordonnées de Ω vérifient cette équation.

PARTIE 3 - GEOMETRIE

5. Soit H' le milieu du segment $[\Omega H]$ et H'' celui du segment [AH]. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

   a. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points

   H' est le milieu du segment $[\Omega H]$ donc H' a pour cooordonnées $\left(\frac{x_\Omega + x_H}{2};\frac{y_\Omega + y_H}{2}\right)$ *ie* $\left(\frac{\frac{1}{2}-5}{2};\frac{-\frac{11}{2}+18}{2}\right)$ *ie* $H'(\frac{-9}{4};\frac{25}{4})$

   H'' est le milieu du segment [AH] donc H'' a pour cooordonnées $\left(\frac{x_A + x_H}{2};\frac{y_A + y_H}{2}\right)$ *ie* $\left(\frac{0-5}{2};\frac{3+18}{2}\right)$ *ie* $H''(\frac{-5}{2};\frac{21}{2})$

   H_A est le point d'intersection de la hauteur h_A du triangle ABC, d'équation $3x+y-3=0$, avec la droite (BC), droite passant par B, de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $\binom{-6}{-2}$ donc il existe un réel k' tel que $(BC): 2x-6y+k'=0$

   où $k' = -2x_B + 6y_B = 16$ *donc* $(BC): 2x-6y+16=0$

   Les coordonnées du point H_A vérifient donc le système (s): $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ 2x-6y+16=0 \end{cases}$ *ie* $\begin{cases} y_{H_A} = -3x_{H_A}+3 \\ 2x_{H_A}+18x_{H_A}-18+16=0 \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} y_{H_A} = -0.3+3 = 2.7 \\ x_{H_A} = 0.1 \end{cases}$

   donc $H_A(\frac{1}{10};\frac{27}{10})$

   b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre H' et de rayon [H'K]

   Dans ce repère orthonormé, ce cercle (C) a pour équation $(x-x_{H'})^2+(y-y_{H'})^2 = H'K^2$

   où $H'\left(\frac{-9}{4};\frac{25}{4}\right)$ et $H'K = \sqrt{(x_K - x'_H)^2 + (y_K - y'_H)^2} = \sqrt{\left(-2+\frac{9}{4}\right)^2 + \left(2-\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{289}{16}} = \sqrt{\frac{290}{16}}$ (repère orthonormé)

   donc ce cercle (C) a pour équation cartésienne $x^2+y^2+\frac{9}{2}x-\frac{25}{2}y+\frac{706}{16} = \frac{290}{16}$ *ie* $x^2+y^2+\frac{9}{2}x-\frac{25}{2}y+26=0$

   c. Montrer que ce cercle passe par K, H'' et H_A.

   Comme [H'K] est un rayon du cercle de centre H' alors K est un point du cercle (C).

   De plus $x_{H''}{}^2 + y_{H''}^2 + \frac{9}{2}x_{H''} - \frac{25}{2}y_{H''} + 26 = \frac{25}{4} + \frac{441}{4} - \frac{45}{4} - \frac{525}{4} + 26 = 0$ *donc H'' appartient aussi à ce cercle*

   De même $x_{H_A}{}^2 + y_{H_A}^2 + \frac{9}{2}x_{H_A} - \frac{25}{2}y_{H_A} + 26 = \frac{1}{100} + \frac{729}{100} + \frac{9}{20} - \frac{675}{20} + 26 = 0$ *donc H_A appartient aussi à ce cercle*

   Ce cercle passe donc par K, H'' et H_A.

On aurait aussi pu calculer H'H'' et $H'H_A$ et montrer que $H'H'' = H'H_A = H'K$

Plus généralement, le cercle de centre H' et de rayon [H'A'] passe par les points A', B' et C' milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] (pieds des 3 médianes de ABC); par les pieds des hauteurs issues de A, B et C du triangle ABC et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] d'où son nom de cercle des neufs points (ou encore cercle d'Euler).

16/20

PARTIE 4 - TRIGONOMETRIE

Exercice 1.

1. x réel,

   a. $A(x) = \cos(-x) - \sin(x+\pi) + \sin(-x) + \cos(\pi - x)$

   $A(x) = \cos(x) - (-\sin(x)) - \sin(x) - \cos(x) = 0$

   b. $B(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x-\pi) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x + 8\pi)$

   $B(x) = \sin(x) + 2\cos(-(x+\pi)) - 3\cos(x) - \sin(x)$

   $B(x) = 2\cos(x+\pi) - 3\cos(x) = -2\cos(x) - 3\cos(x) = -5\cos x$

2.

   a. On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

   $$\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1$$
   $$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$
   $$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{16}{16} - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$$
   $$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}$$
   $$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
   $$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \;ou\; \sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

   $\frac{\pi}{5} \in [0;\,\pi]$, donc $\sin\frac{\pi}{5} \geq 0$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

   b.

   - $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

     $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi$ donc $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$

     $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

     $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\frac{7\pi}{10} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$

     $\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

     $\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

3. $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

   $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

4. x est un réel tel que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \frac{1}{3}$.

   a. On a :

   $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
   $$\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1}{9} = 1$$
   $$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$
   $$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;ou\; \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

   Or $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, donc $\cos x \leq 0$ et $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b.

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}$

$\sin(2x) = 2\cos x \sin x = 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = -\frac{7}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{-4\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{11\sqrt{2}}{27}$

$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = \frac{-4\sqrt{2}}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + -\frac{7}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{27}$

Exercice 2.

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 &= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x - (\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x)\\ &= 1 + \sin 2x - (1 - \sin 2x) = 1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x = 2\sin 2x.\end{aligned}$$

2. Pour tout réel x,

D'une part :

$$\begin{aligned}(1 + \cos x + \sin x)^2 &= (1^2 + 2 \times 1 \times (\cos x + \sin x) + (\cos x + \sin x)^2)\\ &= 1 + 2\cos x + 2\sin x + 1 + \sin 2x = 2 + 2\cos x + 2\sin x + 2\cos x \sin x\\ &= 1 + 2\cos x + 2\sin x + 1 + \sin 2x = 2(1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x)\end{aligned}$$

D'autre part :

$2(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2(1 + \sin x + \cos x + \cos x \sin x)$

Ainsi pour tout réel x on a :

$$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$$

Exercice 3. Résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique (noté C).

1.

a. $\boldsymbol{\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ;\ -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. $\boldsymbol{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ 2x = \frac{\pi}{12} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \frac{\pi}{24} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $S = \left\{\frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ;\ \frac{\pi}{24} + l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. $\boldsymbol{\sin x + 1 = 0} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

Or $-\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d. $\boldsymbol{2\sin x + 1 = 0} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

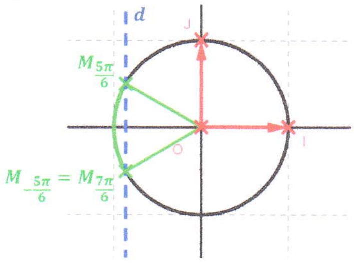
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \frac{4\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $2\sin x + 1 = 0$ est $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ;\ \frac{4\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

2.

a. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour résoudre l'inéquation $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les abscisses des points images sur C sont inférieures strict à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

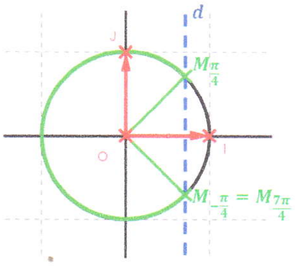
$$S = \left]\frac{5\pi}{6};\ \pi\right] \cup \left]-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right[$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left]\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right[$$

b. $\sqrt{2}\cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\frac{\pi}{4}$.

Pour résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les abscisses des points images sur C sont inférieures ou égales à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right] \cup \left]-\pi;\ -\frac{\pi}{4}\right]$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[\frac{\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$$

c. $\sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x > -1$

Or pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, et les réels x tels que $\sin x = -1$ sont les réels qui s'écrivent sous la forme :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

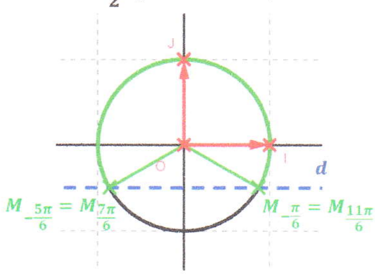
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x + 1 > 0$ est $S = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left]-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$.

d. $2\sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$

Pour résoudre l'inéquation $2\sin x + 1 > 0$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: y = -\frac{1}{2}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les ordonnées des points images sur C sont supérieures strict à $-\frac{1}{2}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left]-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6};\ \pi\right]$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[0;\ \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$$

PARTIE 4 - TRIGONOMETRIE

3. Tableau de signes de l'expression $(2\sin x + 1)(\sin x + 1)$.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$2\sin x + 1$		+	0	-		-	0	+	
$\sin x + 1$		+		+	0	+		+	
$(2\sin x + 1)(\sin x + 1)$		+	0	-	0	-	0	+	

20/20