CORRIGE DES DEVOIRS DE VACANCES POUR LES 1S- TS (ETE 2015)

THEME : DERIVATION (3 exercices)

EXERCICE 1 : « CALCULS DE DERIVEES »

✧ **Pour la fonction f : x $\mapsto$ $-2x^7 + \frac{5}{2}x^2 - x - 12$**

Comme f est une fonction polynôme (de degré 7), alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2 \times 7x^6 + \frac{5}{2} \times 2x - 1 = -14x^6 + 5x - 1$.

✧ **Pour la fonction g : x $\mapsto$ $\frac{x^2 - 5x}{1 - x}$**

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, i.e. sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Soient les fonctions u : x $\mapsto x^2 - 5x$ et v : x $\mapsto 1 - x$.

Comme :
* g est le quotient de u par v sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
* u et v sont dérivables sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$;
* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

alors la fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$u(x) = x^2 - 5x$	donc	$u'(x) = 2x - 5$
$v(x) = 1 - x$	donc	$v'(x) = -1$
$g = \frac{u}{v}$	donc	$g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

i.e. $$g'(x) = \frac{(2x-5)(1-x) - (x^2-5x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 - 5 + 5x + x^2 - 5x}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 5}{(1-x)^2}$$

✧ **Pour la fonction h : x $\mapsto$ $x\sqrt{x}$**

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^+$, i.e. sur $[0 ; +\infty[$.

Soient les fonctions u : x $\mapsto$ x et v : x $\mapsto \sqrt{x}$.

Comme :
* h est le produit de u par v sur $\mathbb{R}^+$;
* u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$;
* v est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, i.e. sur $]0 ; +\infty[$;

alors la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$u(x) = x$	donc	$u'(x) = 1$
$v(x) = \sqrt{x}$	donc	$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$h = uv$	donc	$h' = u'v + uv'$

i.e. $$h'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

✧ **<u>Pour la fonction i : x</u>** $\mapsto 9 + \dfrac{1}{x^3}$

<u>Méthode n° 1 : fonction i vue comme « la somme de deux fonctions dérivables »</u>

La fonction i est définie sur $\mathbb{R}^*$, i.e. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, i.e.] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [.

Soient les fonctions u : x $\mapsto$ 9 et v : x $\mapsto$ x^3.

Comme * i est la somme de u et de l'inverse de v sur $\mathbb{R}^*$;
* u et v sont dérivables sur] - ∞ ; 0 [et sur] 0 ; + ∞ [;
* v s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$;

alors la fonction i est dérivable sur] - ∞ ; 0 [et sur] 0 ; + ∞ [.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$u(x) = 9$ donc $u'(x) = 0$

$v(x) = x^3$ donc $v'(x) = 3\,x^2$

$i = u + \dfrac{1}{v}$ donc $i' = u' + \left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' - \dfrac{v'}{v^2}$

i.e. $i'(x) = 0 - \dfrac{3\,x^2}{(x^3)^2} = -\dfrac{3\,x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

<u>Méthode n°2: fonction i vue comme « le quotient de fonctions dérivables »</u>

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $i(x) = 9 + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{9\,x^3}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{9\,x^3 + 1}{x^3}$

Soient les fonction u : x $\mapsto$ $9\,x^3 + 1$ et v : x $\mapsto$ x^3.

Comme * i est le quotient de u par v sur $\mathbb{R}^*$;
* u et v sont dérivables sur] - ∞ ; 0 [et sur] 0 ; + ∞ [;
* v s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$;

alors la fonction i est dérivable sur] - ∞ ; 0 [et sur] 0 ; + ∞ [.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$u(x) = 9\,x^3 + 1$ donc $u'(x) = 9 \times 3\,x^2 = 27\,x^2$

$v(x) = x^3$ donc $v'(x) = 3\,x^2$

$i = \dfrac{u}{v}$ donc $i' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$

i.e. $i'(x) = \dfrac{27\,x^2 \times x^3 - (9\,x^3 + 1) \times 3\,x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{27\,x^5 - 27\,x^5 - 3\,x^2}{x^6} = -\dfrac{3\,x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

✧ **<u>Pour la fonction j : x</u>** $\mapsto \dfrac{x^2 - x + 7}{5}$

<u>Méthode n°1 : fonction j vue comme le « produit d'un réel par une fonction dérivable »</u>

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $j(x) = \dfrac{1}{5}\left(x^2 - x + 7\right)$.

Soit la fonction u : x $\mapsto$ $x^2 - x + 7$

Comme : * j est le produit de $\frac{1}{5}$ par u sur $\mathbb{R}$;
* u est dérivable sur $\mathbb{R}$;

alors la fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$: $u(x) = x^2 - x + 7$ donc $u'(x) = 2x - 1$

$j = \frac{1}{5} u$ donc $j' = \frac{1}{5} u'$

i.e. $j'(x) = \frac{1}{5}(2x-1) = \frac{2x-1}{5}$

<u>Méthode n°2 (plus longue) : fonction j vue comme le « quotient de deux fonctions dérivables »</u>

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}$ par : $j(x) = \frac{x^2 - x + 7}{5}$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto x^2 - x + 7$ et $v : x \mapsto 5$

Comme : * j est le quotient de u par v sur $\mathbb{R}$;
* u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

alors la fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$u(x) = x^2 - x + 7$ donc $u'(x) = 2x - 1$

$v(x) = 5$ donc $v'(x) = 0$

$j = \frac{u}{v}$ donc $j' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

i.e. $j'(x) = \frac{(2x-1)\times 5 - (x^2 - x + 7)\times 0}{5^2} = \frac{(2x-1)\times 5}{5^2} = \frac{2x-1}{5} = \frac{1}{5}(2x-1)$

✧ **<u>Pour la fonction k : x</u>** $\mapsto \left(2\sqrt{x} + 1\right)^2$

<u>Méthode n°1 : fonction k vue comme la « somme de fonctions dérivables »</u>

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $k(x) = \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 = 4x + 4\sqrt{x} + 1$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto 4x$; $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $w : x \mapsto 1$

Comme : * k est la somme de u, de 4 v et de w sur $\mathbb{R}^+$;
* u et w sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et v sur $\mathbb{R}^{+*}$;

alors la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $u(x) = 4x$ donc $u'(x) = 4$

$v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = 1$ donc $w'(x) = 0$

$k = u + 4v + w$ donc $k' = u' + 4v' + w'$

i.e. $k'(x) = 4 + 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 4 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

Méthode n°2 (plus longue) : k vue comme « le produit (ou le carré) de fonctions dérivables »

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $k(x) = \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 = \left(2\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)$

Etudions d'abord la dérivabilité de la fonction l définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $l(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

Soient les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto 1$

Comme : * l est la somme de 2 u et de v sur $\mathbb{R}^+$;

* u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et v sur $\mathbb{R}^+$;

alors la fonction l est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$u(x) = \sqrt{x}$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = 1$ donc $v'(x) = 0$

$l = 2u + v$ donc $l' = 2u' + v'$

i.e. $l'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Etudions maintenant la dérivabilité de la fonction k :

Comme : * k est le produit de l par l (ou le carré de l) sur $\mathbb{R}^+$;

* l est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;

alors la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, $k = l \times l \; (= l^2)$ donc $k' = l'\,l + l\,l' = 2\,l'\,l$

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $k'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times (2\sqrt{x} + 1) = 4 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

✧ **Pour la fonction m :** $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+3}$

La fonction m est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $m(x) = \dfrac{h(x)}{x^2+3}$

Soit la fonction $v : x \mapsto x^2 + 3$.

Comme : * m est le quotient de h par v sur $\mathbb{R}^+$;

* h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et v sur $\mathbb{R}^+$;

* v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$;

alors la fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:

$h(x) = x\sqrt{x}$ donc $h'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (d'après supra)

$v(x) = x^2 + 3$ donc $v'(x) = 2x$

$k = \dfrac{h}{u}$ donc $k' = \dfrac{h'v - h\,v'}{v^2}$

i.e. $k'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\times(x^2+3) - x\sqrt{x}\times 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$

d'où $k'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\,(9-x^2)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{\sqrt{x}\,(9-x^2)}{2(x^2+3)^2}$

EXERCICE 2: « TANGENTES »

Explications pour construire les points A, B, C, D et E (non demandées)

On utilise les $1^{ère}$ et $2^{ème}$ lignes du tableau.

Comme g(- 7) = - 6, alors la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées (- 7 ; - 6) : c'est le point A.

De même, on a : B (- 3 ; - 1) ; C (0 ; - 2) ; D (3 ; - 3) et E (5 ; 0).

Explications (non demandées) pour construire les tangentes en ces points

On utilise les $1^{ère}$ et $3^{ème}$ lignes du tableau.

** La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse – 7 a pour coefficient directeur g'(- 7) i.e. 4.*

*i.e la tangente à $\mathscr{C}$ en A (- 7 ; - 6) passe aussi par le point P (- 7 **+ 1** ; - 6 **+ 4**) i.e. P (- 6 ; - 2).*

** La tangente à $\mathscr{C}$ en B (- 3 ; - 1) a pour coefficient directeur g'(- 3) i.e. 0.*

Ainsi la tangente à $\mathscr{C}$ en B est parallèle à l'axe des abscisses.

** La tangente à $\mathscr{C}$ en C (0 ; - 2) a pour coefficient directeur g'(0) i.e. – 1.*

*Elle passe donc aussi par le point R (0 **+ 1** ; - 2 **– 1**) i.e. par R (1 ; - 3).*

** La tangente à $\mathscr{C}$ en D (3 ; - 3) a pour coefficient directeur g'(3) i.e.0.*

Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.

** La tangente à $\mathscr{C}$ en E (5 ; 0) a pour coefficient directeur g'(5) i.e. 3.*

*Elle passe donc aussi par le point S (5 **+ 1** ; 0 **+ 3**) i.e. par S (6 ; 3).*

Explications (non demandées) pour finir un tracé de $\mathscr{C}$

Etudions les variations de g :

Comme g est monotone sur] - ∞ ; - 3], alors sa fonction dérivée est de signe constant sur] - ∞ ; - 3].

Or g'(- 7) = 4

donc g' est positive sur] - ∞ ; - 3], et par conséquent g est croissante sur] - ∞ ; - 3].

De même, on montrerait que g est décroissante sur [- 3 ; 2] et croissante sur [2 ; + ∞ [.

Pour tracer une représentation graphique de g, il faut donc :

** faire passer $\mathscr{C}$ par les points A, B, C, D et E ;*

** prendre soin de respecter les directions données par les tangentes aux voisinages de ces points ;*

** respecter les variations de la fonction g déterminées ci-dessus.*

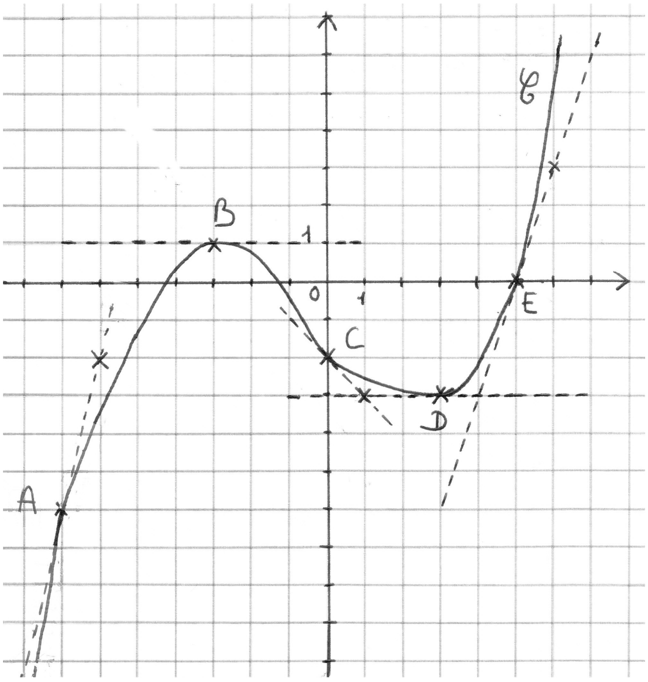
Remarque

La représentation graphique de g qui suit n'est qu'une des nombreuses possibilités qui existent, tout en respectant les trois conditions ci-dessus.

N'hésitez donc pas à demander à un professeur de vérifier votre tracé.

⇨

1) a) b) c)



2) a) <u>Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 5.</u>

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point D d'abscisse 5 est :

y = g'(a) (x – a) + g(a)   avec a = 3
y = g'(5) (x – 5) + g(5)
y = 3 (x – 5) + 0
y = 3 x - 15

b) <u>Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.</u>

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse - 7 est :

y = g'(a) (x – a) + g(a)   avec a = - 7
y = g'(- 7) (x + 7) + g(- 7)
y = 4 (x + 7) - 6
y = 4 x + 22

<u>Exercice 3 : « Optimisation et encadrement »</u>

a) <u>Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction *V* ?</u>

$\mathscr{D}$ = [0 ; 0,6]   (mais la réponse $\mathscr{D}$ =] 0 ; 0,6 [est également acceptable)

<u>Explications (non demandées) :</u>

Pour pouvoir enlever un carré de côté x à chaque coin de la plaque carrée mesurant 1,2 m de côté, il faut que cette longueur 1,2 puisse être diminuée de 2 x et que la longueur 1,2 – 2 x reste positive.
Or   1,2 – 2 x > 0   ⇔   1,2 > 2 x   ⇔   0,6 > x   ⇔   x < 0,6.

b) <u>Soit x ∈ $\mathscr{D}$. Exprimons *V*(x) en fonction de x</u>.

Le fond de la boîte parallélépipédique est un carré de coté (1,2 – 2 x) et sa hauteur est x.

Donc le volume (en m^3) de cette boîte est : *V*(x) = $(1,2 – 2 x)^2$ × x.

c) <u>Etudions les variations de V sur [0 ; 0,6].</u>

Pour tout x de [0 ; 0,6], $V(x) = x(1{,}2 - 2x)^2 = x(1{,}44 - 4{,}8x + 4x^2) = 4x^3 - 4{,}8x^2 + 1{,}44x$.

Ainsi la fonction V est une fonction polynôme (de degré 3), restreinte à l'intervalle [0 ; 0,6].

Donc V est dérivable sur [0 ; 0,6].

De plus, pour tout x de [0 ; 0,6], $V'(x) = 4 \times 3x^2 - 4{,}8 \times 2x + 1{,}44 = 12x^2 - 9{,}6x + 1{,}44$.

Etudions le signe de ce trinôme du 2nde degré :

$12x^2 - 9{,}6x + 1{,}44 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 12$ ($a \neq 0$), $b = -9{,}6$ et $c = 1{,}44$

Donc son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-9{,}6)^2 - 4 \times 12 \times 1{,}44 = 92{,}16 - 69{,}12 = 23{,}04$.

Comme $\Delta > 0$, alors ce trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9{,}6) - \sqrt{23{,}04}}{2 \times 12} = \frac{9{,}6 - 4{,}8}{24} = \frac{4{,}8}{24} = 0{,}2$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9{,}6 + 4{,}8}{24} = \frac{14{,}4}{24} = 0{,}6$$

De plus, ce trinôme sera du signe a, i.e. positif, sauf sur [0,2 ; 0,6].

D'où le tableau suivant :

x	0		0,2		0,6
Signe de $V'(x)$		+	0	-	0
Variations de V	0	↗	0,128	↘	0

$V(0) = 0$
$V(0{,}2) = 0{,}128$
$V(0{,}6) = 0$

Ainsi, la fonction V est strictement croissante sur [0 ; 0,2] et strictement décroissante sur[0,2 ; 0,6].

d) <u>Comment obtenir une boîte de volume maximal ?</u>

D'après le tableau ci-dessus, la fonction V admet 0,128 comme maximum et il est atteint en 0,2.

Cela signifie que pour obtenir une boîte de volume maximal, il faut enlever au chaque coin de la plaque un carré de côté mesurant 0,2 m i.e. 20 cm.

Le volume maximal de la boîte est alors égal à 0,128 m^3, i.e. 128 dm^3.

e) <u>Déterminons un encadrement de $V(x)$ lorsque x appartient à [0,1 ; 0,4].</u>

Soit $x \in [\,0{,}1 ; 0{,}4\,]$.

D'après le tableau ci-dessus : * le maximum de V est alors 0,128 ;
* le minimum de V est soit $V(0{,}1)$, soit $V(0{,}4)$;

Or $V(0{,}1) = 0{,}1$ et $V(0{,}4) = 0{,}064$

Ainsi $0{,}064 \leq V(x) \leq 0{,}128$