Exercices de révision sur la géométrie

Exercice 1 : Soit ABCD un carré non aplati dont la longueur des côtés vaut 1 unité de longueur.
Soit E le milieu de [AD] et F celui de [BC]

1. Faire une figure.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les droites (EB) et (DF) ?
3. Cette question vise à prouver la conjecture à l'aide de quatre méthodes différentes (les questions a., b., c. et d. sont par conséquent indépendantes)
   a. Méthode 1 : i. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
      ii. Décomposer alors les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
      iii. Conclure.
   b. Méthode 2 : i. Justifier que (D,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DA}$) est un repère du plan
      ii. Déterminer les coordonnées des points D, C, B,A, E et F dans ce repère
      iii. Conclure
   c. Méthode 3 : i. Justifier que (B,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BA}$) est un repère du plan
      ii. Déterminer une équation cartésienne des droites (EB) et (DF) dans ce repère
      iii. Conclure.
   d. Méthode 4 : i. montrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme.
      ii. conclure.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle non aplati. Soit D le point du plan défini par $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
Soit I le milieu du segment [AB], J celui de [CD].
Soit E le point du plan tel que $3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ et F celui défini par $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. Soit K le milieu du segment [EF] .

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les points I, K et J ?
2. Preuve de cette conjecture à l'aide de trois méthodes différentes :
   a. Méthode 1 : i. Justifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère.
      ii. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
      iii. Conclure
   b. Méthode 2 : i. Justifier que $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère.
      ii. Déterminer les coordonnées des points I, K, J dans ce repère
      iii. Conclure
   c. Méthode 3 : On reprendra les coordonnées des points I, K et J dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ trouvées au b.
      i. Trouver une équation cartésienne de la droite (IK).
      ii. Conclure

Exercice 3 : ABCD est un carré non aplati, E et F sont les milieux des segments [AB] et [BC].

1) 1ère méthode : i. Montrer que $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})$=0
   ii. Que peut-on en déduire pour les droites (DE) et (AF) ?
2) 2nde méthode : i. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère
   ii. Utiliser judicieusement ce repère pour retrouver le résultat établi au 1ii).

Exercice 4 : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans lequel les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées (0;3) ; (1 ;3) et (-5 ;1). Soit H le point de coordonnées (-5 ;18)

1. a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
   b. Déterminer une équation de la hauteur h_A issue du sommet A du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
4. Montrer que les points H, Ω et G appartiennent à une même droite.
5. Soit H' le milieu du segment [ΩH] et H'' celui du segment [AH]. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.
   a. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points
   b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre H' et de rayon [H'K]
   c. Montrer que ce cercle passe par K, H'' et H_A.

Plus généralement, le cercle de centre H' et de rayon [H'A'] passe par les points A', B' et C' milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] (pieds des 3 médianes de ABC); par les pieds des hauteurs issues de A, B et C du triangle ABC et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] d'où son nom de cercle des neufs points (ou encore cercle d'Euler).