Statistiques, probabilités et échantillonnage - Exercices de révision

▷ **Exercice 1 :** On étudie dans cet exercice les séries formées par les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par deux classes (A et B) à un contrôle commun.

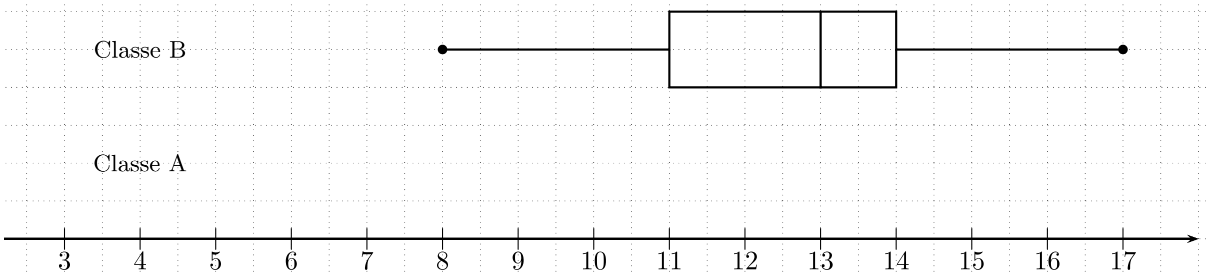
Partie A : On étudie dans cette partiee la série formée par les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par la classe A qui sont donnés dans le tableau suivant :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	2	2	2	1	0	1	3	1	4	4	2	2	1	0	0	0

1. Déterminer $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe et Me, la note médiane de cette classe.
2. Déterminer V, la variance puis σ, l'écart-type de cette série, arrondi au centième.
   On détaillera le calcul de la variance (l'utilisation des pointillés pour résumer les calculs est autorisée).

Partie B : Sur le même contrôle, la classe B, avait une note moyenne, notée $\overline{x'}$, de 12,44 et un écart-type, noté σ', d'environ 2,21.

1. Sur la base de ces indicateurs statistiques, comparer les résultats des deux classes.
2. Sur la figure ci-dessous, on a représenté le diagramme en boite de la classe B. (ici, ce diagramme utilise les valeurs extrêmes)
   (a) Déterminer, Me', Q'_1 et Q'_3, la médiane, les premiers et troisième quartiles de la série statistique formée par les résultats de la classe B.
   (b) Représenter le diagramme en boite de la classe A sur la même figure. Détailler l'obtention des Q_1 et Q_3, les premiers et troisième quartiles de la série statistique formée par les résultats de la classe A.
   (c) Sur la base de ces deux diagrammes, comparer les résultats des deux classes.
3. Que peut-on dire des conclusions des questions 1. et 2.(c) ?



Partie C : Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidables signifie que l'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.) Justifier la réponse.

(a) Environ 50 % des élèves de la classe A ont une note comprise 8 et 14.
(b) Au moins 66 % des élèves de la classe B ont une note comprise 10,23 et 14,65.
(c) Au moins 75 % des élèves de la classe B ont une note inférieure ou égale à 14.
(d) Au moins 25 % des élèves de la classe A ont une note inférieure ou égale à la note la plus basse des élèves de la classe B.

▷ **Exercice 2 :** On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :

− 1 secteur de couleur rouge (R) ;	− 2 secteurs de couleur bleue (B) ;	− 5 secteurs de couleur verte (V).

Pour participer à ce jeu, chaque joueur doit payer 2 euros et faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que la roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :

− 0 euro si c'est le vert ;	− 3 euros si c'est le bleu ;	− 5 euros si c'est le rouge.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain final (gain − mise de départ) correspondant.

1. Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.
2. (a) Calculer l'espérance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Interpréter le résultat en terme de partie et de gain. Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur ?
3. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à 0, car, alors, ni l'organisateur, ni le joueur ne sont avantagés. Quelle somme (à la place de 2 €) devrait miser avant chaque partie, le joueur pour que le jeu soit équitable ? Justifier la réponse.

▷ **Exercice 3 :**

Sur les 1 000 élèves d'un lycée, 120 sont majeurs. Des stages en entreprise sont organisés chaque année tels que :
- chaque élève participe au plus à un stage ;
- 5 % des élèves mineurs partent en stage ;
- 25 % des élèves majeurs partent en stage.

1. Recopier et compléter le tableau de répartitions des élèves (y faire figurer les effectifs).

	Mineur	Majeur	Total
En stage			
Pas en stage			
Total			

2. On rencontre un élève au hasard et on définit les événements suivants :
   - M : « l'élève rencontré est majeur » ; • S : « l'élève rencontré part en stage » ;

   Déterminer les probabilités suivantes : • $P(\overline{M})$ • $P(\overline{M} \cap S)$ • $P(S)$ • $P(M \cup S)$
3. On choisit un élève au hasard, parmi les élèves partant en stage. Quelle est la probabilité qu'il soit mineur ?
4. On prélève au hasard, un échantillon aléatoire de 100 élèves parmi les lycéens (la population est suffisamment grande pour assimiler cet échantillon à une succession de 100 tirages avec remise).
   (a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement, 50 élèves partant en stage ?
   (b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, à partir de quel nombre k, la probabilité qu'il y ait au plus k élèves partant en stage dépassera-t-elle 0,025.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice, à partir de quel nombre k', la probabilité qu'il y ait au plus k' élèves partant en stage sera supérieure ou égale à 0,975.
   (d) Sur les 100 élèves de la filère L, 21 partent en stage. Au seuil de risque de 5%, peut-on dire que les élèves de filère L sont représentatifs de la proportion des élèves partis en stage du lycée ?
5. Chaque stage dure 4 jours pour un élève mineur et 9 jours pour un élève majeur. On note Y la variable aléatoire associant à chaque élève le nombre de jours de stage.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de Y et interpréter le résultat

---

▷ **Exercice 4 :** Une urne contient n jetons ($n \geq 8$) indiscernables au toucher dont 7 sont verts et les autres sont trouges.
On y prélève successivement et en remettant le jeton prélevé dans l'urne à chaque fois, deux jetons.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de couleurs obtenues lors du tirage.

1. Dans le cas où $n = 10$, à l'aide d'un arbre, déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.
2. (a) Dans le cas général, déterminer, en fonction de n, la loi de probabilité de X.
   (b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{n^2 + 14n - 98}{n^2}$.
3. On pose, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 14x - 98}{x^2}$.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 1 + \dfrac{14}{x} - \dfrac{98}{x^2}$.
   (b) Etudier les variations de f.
   (c) En déduire n pour que l'espérance soit maximale.

▷ **Exercice supplémentaire :**

Des études statistiques ont montré qu'à la naissance la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0,51.
On rencontre au hasard une famille de trois enfants dont les naissances sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de garçons.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Montrer que la probabilité que cette famille ait au moins un garçon est d'environ 0,88.
   On prendra 0,88 pour valeur de $P(X = 1)$ dans la suite de l'exercice.
3. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 50 familles de trois enfants, les hypothèses étant les mêmes que décrites ci-dessus.
   Calculer la probabilité, arrondie au centième, que quarante-cinq familles exactement sur les cinquante aient au moins un garçon.
4. On donne l'extrait d'une table concernant une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,88$.

k	...	36	37	38	39	40	...	46	47	48	49	50
$p(Z \leqslant k)$	...	0,001764	0,005115	0,013524	0,032498	0,0707628	...	0,865466	0,948736	0,986901	0,998325	1

   Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (niveau 1S) de $\dfrac{Z}{50}$.
5. Certains pesticides ont une influence sur le nombre de naissance de garçons. A Ufa, en Russie dans les années 1980, parmi les 50 familles de trois enfants dont les parents furent exposées à des pesticides dans une usine d'engrais, 38 exactement avaient au moins un garçon.
   Peut-on estimer que cette répartition était due au hasard ? L'usine d'engrais a-t-elle eu une influence sur le nombre de garçons ?