VERS LA TERMINALE S - Exercices de révision

Partie 1 : ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1 :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Etudier le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -f(x)$.
   (a) Donner les variations de la fonction g.
   (b) Donner le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |f(x)|$.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
   (b) Représenter la fonction h dans un repère orthonormé.

Exercice 2 :

On donne les fonctions f, g et h définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$\bullet\ f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\bullet\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $\bullet\ h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Leurs courbes représentatives sont notées, respectivement, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.

1. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.
2. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_h$.
3. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_g$ et de $\mathscr{C}_h$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;5[$.

Exercice 4 :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{-x^2 - 3}{x^2 + 1}$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que $g(x) = -1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.
3. En déduire les variations de la fonction g.

Partie 2 : DERIVATION

EXERCICE 1 : « CALCULS DE DERIVEES »

Dériver les fonctions suivantes, après avoir donné leurs ensembles de définition et déterminé sur quels intervalles elles sont dérivables.

$f : x \mapsto -2x^7 + \frac{5}{2}x^2 - x - 12$ $\quad$ $g : x \mapsto g(x) = \frac{2x^2 - 5x}{1 - x}$ $\quad$ $h : x \mapsto x\sqrt{x}$

$i : x \mapsto 9 + \frac{1}{x^3}$ $\quad$ $j : x \mapsto \frac{x^2 - x + 7}{5}$ $\quad$ $k : x \mapsto (2\sqrt{x} + 1)^2$ $\quad$ $m : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3}$

EXERCICE 2: « TANGENTES »

Soient g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

On sait que : * g est monotone sur chacun des intervalles $]-\infty ; -3]$, $[-3 ; 2]$ et $[2 ; +\infty[$;

* g est dérivable sur $\mathbb{R}$;
* g et g' vérifient les conditions ci-dessous :

x	-7	-3	0	3	5
$g(x)$	-6	-1	-2	-3	0
$g'(x)$	4	0	-1	0	3

1) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) placer les points A, B, C, D et E de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -7 ; -3 ; 0 ; 3 et 5.

b) tracer (en pointillés) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun de ces points ;

c) finir de tracer une courbe $\mathscr{C}$ (en prenant soin de respecter la direction donnée par les tangentes).

2) ***a)*** Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 5.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

EXERCICE 3 : « OPTIMISATION ET ENCADREMENT »

Dans une plaque de carton carrée de 1,20 mètre de côté, on découpe des carrés identiques aux quatre coins afin de construire une boîte parallélépipédique sans couvercle.

On note :

* x la longueur, en mètre, du carré à enlever à chaque coin de la plaque ;
* $V(x)$ le volume de la boîte, exprimé en fonction de x.

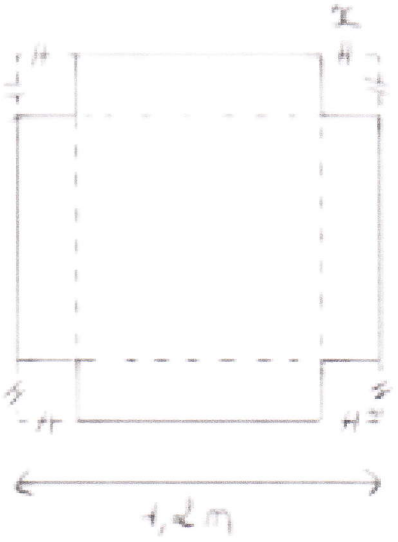
a) Donner (sans justifier) l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction V, où $V : x \mapsto V(x)$.

b) Soit $x \in \mathscr{D}$. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

c) Etudier les variations de la fonction V sur $[0 ; 0{,}6]$.

d) En déduire comment obtenir une boîte de volume maximal et préciser alors la valeur de ce volume.

e) Déterminer un encadrement, le plus précis possible, de $V(x)$ lorsque x appartient à $[0{,}1 ; 0{,}4]$.



Partie 3 : GEOMETRIE

Exercice 1 : Soit ABCD un carré non aplati dont la longueur des côtés vaut 1 unité de longueur.
Soit E le milieu de [AD] et F celui de [BC]

1. Faire une figure.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les droites (EB) et (DF) ?
3. Cette question vise à prouver la conjecture à l'aide de quatre méthodes différentes (les questions a., b., c. et d. sont par conséquent indépendantes)
   - a. Méthode 1 : i. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
     ii. Décomposer alors les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
     iii. Conclure.
   - b. Méthode 2 : i. Justifier que $(D,\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ est un repère du plan
     ii. Déterminer les coordonnées des points D, C, B, A, E et F dans ce repère
     iii. Conclure
   - c. Méthode 3 : i. Justifier que $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ est un repère du plan
     ii. Déterminer une équation cartésienne des droites (EB) et (DF) dans ce repère
     iii. Conclure.
   - d. Méthode 4 : Montrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme ; puis conclure.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle non aplati. Soit D le point du plan défini par $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
Soit I le milieu du segment [AB], J celui de [CD].
Soit E le point du plan tel que $3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ et F celui défini par $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. Soit K le milieu du segment [EF] .

1. Quelle conjecture peut-on émettre sur les points I, K et J ?
2. Preuve de cette conjecture à l'aide de trois méthodes différentes :
   - a. Méthode 1 : i. Justifier que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base.
     ii. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ dans cette base.
     iii. Conclure
   - b. Méthode 2 : i. Justifier que $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ est un repère.
     ii. Déterminer les coordonnées des points I, K, J dans ce repère
     iii. Conclure
   - c. Méthode 3 : On reprendra les coordonnées des points I, K et J dans le repère $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ trouvées au b.
     i. Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK).
     ii. Conclure.

Exercice 3 : ABCD est un carré non aplati, E et F sont les milieux des segments [AB] et [BC].

1) 1ère méthode : Calculer $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}$ en décomposant judicieusement ces deux vecteurs ; puis conclure.
2) 2nde méthode : i. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère
   ii. Déterminer les coordonnées des points A, F, E et D dans ce repère ; puis conclure.
3) 3ème méthode : On considère que ABCD est un carré direct non aplati.
   Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE})$ puis conclure.

Exercice 4 : Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé dans lequel les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées (0;3) ; (1 ;3) et (-5 ;1). Soit H le point de coordonnées (-5 ;18)

1. a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
   b. Déterminer une équation de la hauteur h_A issue du sommet A du triangle ABC.
2. a. Déterminer une équation cartésienne pour chacune des médiatrices des segments [AB] et [AC].
   b. En déduire les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. a. Déterminer des équations cartésiennes des médianes issues de A et de B du triangle ABC. Soit K le milieu du segment [BC].
   b. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
4. Montrer que les points H, Ω et G appartiennent à une même droite.
5. Soit H' le milieu du segment [ΩH] et H'' celui du segment [AH]. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.
   - a. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points
   - b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre H' et de rayon [H'K]
   - c. Montrer que ce cercle passe par K, H'' et H_A.

Plus généralement, le cercle de centre H' et de rayon [H'A'] passe par les points A', B' et C' milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] (pieds des 3 médianes de ABC); par les pieds des hauteurs issues de A, B et C du triangle ABC et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] d'où son nom de cercle des neufs points (ou encore cercle d'Euler).

Partie 4 : TRIGONOMETRIE

Exercice 1.

1. x réel, écrire les expressions suivantes en ne faisant apparaître que $\cos x$ et $\sin x$.
   a. $A(x) = \cos(-x) - \sin(x+\pi) + \sin(-x) + \cos(\pi - x)$
   b. $B(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x-\pi) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x + 8\pi)$
2.
   a. On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Déterminer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.
   b. En utilisant la question précédente, déterminer les valeurs du cosinus et du sinus des réels $-\frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \frac{7\pi}{10}$.
3. Calculer les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.
   (on pourra utiliser l'égalité $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$).
4. x est un réel tel que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \frac{1}{3}$.
   a. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   b. En utilisant les formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs exactes de :
   $$\cos(2x)\,;\,\sin(2x)\,;\,\cos(3x)\,;\,\sin(3x)$$

Exercice 2. Démontrer les affirmations suivantes :

1. Pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 2\sin 2x$.
2. Pour tout réel x, $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$.

Exercice 3. Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.
   a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b. $\sin x + 1 = 0; 2\sin x + 1 = 0$.
2. Résoudre les inéquations suivantes tout d'abord dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $[0; 2\pi[$.
   a. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{2}\cos x - 1 \leq 0$.
   b. $\sin x + 1 > 0; 2\sin x + 1 > 0$.
   c. En déduire, sur $]-\pi;\ \pi]$, le tableau de signes de l'expression $(2\sin x + 1)(\sin x + 1)$.

Partie 5 : ECHANTILLONNAGE - PROBABILITES - STATISTIQUES

Exercice 1 :

On étudie dans cet exercice les séries formées par les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par deux classes (A et B) à un contrôle commun.

Partie A :

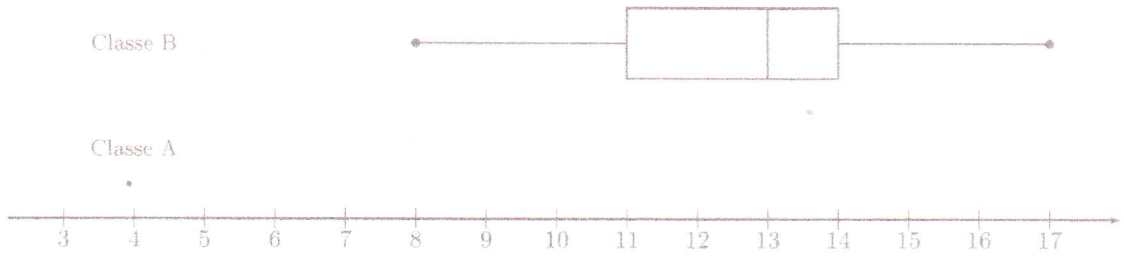
On étudie dans cette partie la série formée par les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par la classe A qui sont donnés dans le tableau suivant :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	2	2	2	1	0	1	3	1	4	4	2	2	1	0	0	0

1. Déterminer $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe et Me, la note médiane de cette classe.
2. Déterminer V , la variance puis σ, l'écart-type de cette série, arrondi au centième. On détaillera le calcul de la variance (l'utilisation des pointillés pour résumer les calculs est autorisée).

Partie B :

Sur le même contrôle, la classe B, avait une note moyenne, notée $\overline{x'}$, de 12,44 et un écart-type, noté σ', d'environ 2,21.
1. Sur la base de ces indicateurs statistiques, comparer les résultats des deux classes.
2. Sur la figure ci-dessous, on a représenté le diagramme en boite de la classe B. (ici, ce diagramme utilise les valeurs extrêmes)
(*a*) Déterminer, Me', Q'_1 et Q'_3, la médiane, les premiers et troisième quartiles de la série statistique formée par les résultats de la classe B.
(*b*) Représenter le diagramme en boite de la classe A sur la même figure. Détailler l'obtention des Q_1 et Q_3, les premiers et troisième quartiles de la série statistique formée par les résultats de la classe A. **(*c*)** Sur la base de ces deux diagrammes, comparer les résultats des deux classes.
3. Que peut-on dire des conclusions des questions **1.** et **2.(*c*)**?



Partie C : Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidables signifie que l'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.) Justifier la réponse.
(*a*) Environ 50 % des élèves de la classe A ont une note comprise 8 et 14.
(*b*) Au moins 66 % des élèves de la classe B ont une note comprise 10,23 et 14,65.
(*c*) Au moins 75 % des élèves de la classe B ont une note inférieure ou égale à 14.
(*d*) Au moins 25 % des élèves de la classe A ont une note inférieure ou égale à la note la plus basse des élèves de la classe B.

Exercice 2 :

On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :
– 1 secteur de couleur rouge (R) ; – 2 secteurs de couleur bleue (B) ; – 5 secteurs de couleur verte (V).
Pour participer à ce jeu, chaque joueur doit payer 2 euros et faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que la roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :
– 0 euro si c'est le vert ; – 3 euros si c'est le bleu ; – 5 euros si c'est le rouge.
On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain final (gain – mise de départ) correspondant.
1. Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.
2. **(*a*)** Calculer l'espérance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
(*b*) Interpréter le résultat en terme de partie et de gain. Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur?
3. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à 0, car, alors, ni l'organisateur, ni le joueur ne sont avantagés. Quelle somme (à la place de 2€) devrait miser avant chaque partie, le joueur pour que le jeu soit équitable? Justifier la réponse.

Exercice 3 :

Sur les 1000 élèves d'un lycée, 120 sont majeurs. Des stages en entreprise sont organisés chaque année tels que :
• chaque élève participe au plus à un stage ;
• 5% des élèves mineurs partent en stage ; • 25% des élèves majeurs partent en stage.

1. Recopier et compléter le tableau de répartitions des élèves (y faire figurer les effectifs).

	Mineurs	Majeurs	Total
En stage			
Pas en stage			
Total			

2. On rencontre un élève au hasard et on définit les événements suivants :
• M : " l'élève rencontré est majeur " ; • S : " l'élève rencontré part en stage " ;
Déterminer les probabilités suivantes : • $P(\overline{M})$ • $P(\overline{M} \cap S)$ • $P(S)$ • $P(M \cup S)$

3. On choisit un élève au hasard, parmi les élèves partant en stage. Quelle est la probabilité qu'il soit mineur?

4. On prélève au hasard, un échantillon aléatoire de 100 élèves parmi les lycéens (la population est suffisamment grande pour assimiler cet échantillon à une succession de 100 tirages avec remise).

(*a*) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement, 50 élèves partant en stage?

(*b*) Déterminer à l'aide de la calculatrice, à partir de quel nombre k, la probabilité qu'il y ait au plus k élèves partant en stage dépassera-t-elle 0,025.

(*c*) Déterminer à l'aide de la calculatrice, à partir de quel nombre k', la probabilité qu'il y ait au plus k' élèves partant en stage sera supérieure ou égale à 0,975.

(*d*) Sur les 100 élèves de la filière L, 21 partent en stage. Au seuil de risque de 5%, peut-on dire que les élèves de filière L sont représentatifs de la proportion des élèves partis en stage du lycée?

5. Chaque stage dure 4 jours pour un élève mineur et 9 jours pour un élève majeur. On note Y la variable aléatoire associant à chaque élève le nombre de jours de stage.

(*a*) Déterminer la loi de probabilité de Y .

(*b*) Calculer l'espérance mathématique de Y et interpréter le résultat

Exercice 4 :

Une urne contient n jetons ($n \geq 8$) indiscernables au toucher dont 7 sont verts et les autres sont rouges. On y prélève successivement et en remettant le jeton prélevé dans l'urne à chaque fois, deux jetons. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de couleurs obtenues lors du tirage.

1. Dans le cas où $n = 10$, à l'aide d'un arbre, déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.

2. **(*a*)** Dans le cas général, déterminer, en fonction de n, la loi de probabilité de X.

(*b*) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{n^2 + 14n - 98}{n^2}$.

3. On pose, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 14x - 98}{x^2}$.

(*a*) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 1 + \dfrac{14}{x} - \dfrac{98}{x^2}$.

(*b*) Etudier les variations de f.

(*c*) En déduire n pour que l'espérance soit maximale.

Exercice supplémentaire :

Des études statistiques ont montré qu'à la naissance la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0,51. On rencontre au hasard une famille de trois enfants dont les naissances sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de garçons.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Montrer que la probabilité que cette famille ait au moins un garçon est d'environ 0,88.
On prendra 0,88 pour valeur de $P(X = 1)$ dans la suite de l'exercice.

3. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 50 familles de trois enfants, les hypothèses étant les mêmes que décrites ci-dessus. Calculer la probabilité, arrondie au centième, que quarante-cinq familles exactement sur les cinquante aient au moins un garçon.

4. On donne l'extrait d'une table concernant une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}88$.

k	...	36	37	38	39	40	...	46	47	48	49	50
$p(Z \leqslant k)$	...	0,001764	0,005115	0,013524	0,032498	0,0707628	...	0,865466	0,948736	0,986901	0,998325	1

Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% (niveau 1S) de $\dfrac{Z}{50}$.

5. Certains pesticides ont une influence sur le nombre de naissance de garçons. A Ufa, en Russie dans les années 1980, parmi les 50 familles de trois enfants dont les parents furent exposés à des pesticides dans une usine d'engrais, 38 exactement avaient au moins un garçon. Peut-on estimer que cette répartition était due au hasard? L'usine d'engrais a-t-elle eu une influence sur le nombre de garçons?

Partie 6 : SUITES

Exercice 1

La suite géométrique (v_n) est définie par $v_1 = 16$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n. Puis calculer v_{11}.
3. Calculer $S_{11} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{11}$ (arrondir à 10^{-2}).
4. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n). Justifier.

Exercice 2

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.

1. Calculer u_1 et u_2. Que peut-on en déduire pour cette suite ? (On ne demande pas de justifier.)
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par : $a_n = \frac{1}{u_n} + 1$.
   (a) Calculer a_0 et a_1.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (c) Donner alors, l'expression de a_n en fonction de n.
3. (a) En déduire une formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en justifiant.
   (c) Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (On ne demande pas de justifier.)

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 2$.
   (a) Calculer w_0 et prouvez que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
   (b) Exprimez w_n en fonction de n.
   (c) Quel est le sens de variation de la suite (w_n) ? Justifiez votre réponse.
2. (a) Déduisez des questions précédentes le sens de variation de la suite (u_n) et l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n > 2$?
   (c) En utilisant la calculette, déterminez le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n - 2 < 10^{-3}$. Expliquez rapidement votre façon de faire.

Les corrigés des exercices seront mis en ligne fin août.